

UNA BREVE INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE ECUACIONES DIFERENCIALES IMPULSIVAS

RICARDO FELIPE TORRES NARANJO

*Instituto de Ciencias Físicas y Matemáticas, Facultad de Ciencias,
Universidad Austral de Chile, Campus Isla Teja s/n, Valdivia, Chile.*

Esta primera versión de apunte fue confeccionada en ocasión especial para la realización de un cursillo dirigido a la comunidad del Doctorado en Modelamiento Matemático aplicado ($DM2_a$) de la Universidad Católica del Maule durante los días 21 y 22 de abril de 2025. Este escrito busca motivar e introducir al lector en la teoría de ecuaciones diferenciales impulsivas a tiempos fijos. Agradezco la oportunidad de compartir algunas de las ideas que he ido aprendiendo con el tiempo. Naturalmente, no puedo asegurar que el texto esté libre de errores, los cuales asumo completamente (y agradeceré mucho si me los hacen notar por correo electrónico).

Índice

1. Una introducción: ejemplos interesantes	4
1.1. Un ejemplo: el caso lineal homogéneo con coeficientes constantes	4
1.2. Algo sobre estabilidad de sistemas impulsivos	6
1.3. Ejemplos de sistemas estables	6
1.4. Ecuaciones lineales en diferencias finitas	9
2. Ecuaciones diferenciales impulsivas	10
2.1. Ecuación integral asociada	11
2.2. Desigualdad Impulsiva del tipo Gronwall-Bellman	13
2.3. Existencia y Unicidad de soluciones	15
3. Sistemas impulsivos lineales	17
3.1. Sistema impulsivo lineal homogéneo	17
3.2. Sistema impulsivo lineal no homogéneo	19
4. Equilibrio asintótico para un sistema de ecuaciones impulsivas	21
4.1. Equilibrio asintótico	22
4.2. Ejemplo de equilibrio asintótico	24
5. Oscilaciones en ecuaciones diferenciales impulsivas de primer orden	26
5.1. Oscilaciones para el caso lineal impulsivo	27
6. Teoría de Floquet impulsiva	28
6.1. Por qué sospechar de un Teorema de Floquet para IDE?	29
6.2. Construcción de la teoría de Floquet-Lyapunov	31
6.3. Resultados auxiliares	31
6.4. El operador de monodromía	32
6.5. El logaritmo del operador de monodromía	33
6.6. Multiplicadores y exponentes de Floquet, exponentes de Lyapunov	33
6.7. El teorema de Floquet	36
7. Soluciones periódicas	39
8. Solución periódica del sistema lineal no homogéneo (caso no-crítico)	39
8.1. Solución periódica del sistema lineal no homogéneo	39
9. Agradecimientos	43

E-mail address: ricardo.torres@uach.cl.

Date: May 7, 2025.

Dedicado a mi hermosa Frida y a mi querido amigo y maestro Manuel Pinto Jiménez.

1. Una introducción: ejemplos interesantes

1.1. **Un ejemplo: el caso lineal homogéneo con coeficientes constantes.** Analizaremos las soluciones del sistema

$$(1.1) \quad \begin{aligned} x'(t) &= ax(t), & t \neq t_k \\ x(t_k) &= \alpha x(t_k^-) & t = t_k, \quad k \in \mathbb{N} \\ x(t_0) &= x_0. \end{aligned}$$

Para $t \in [t_n, t_{n+1})$ con $x(t_n) = x_n$, tenemos que la solución de (1.1)

$$(1.2) \quad x(t) = e^{a(t-t_n)} x_n,$$

como solución en dicho intervalo. Ahora para ver lo que ocurre cuando $t \in [t_{n+1}, t_{n+2})$, debemos obtener una condición inicial en este intervalo. Ella vendrá dada por la ley de impulso de (1.1), a saber

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x(t_{n+1}) \\ &= \alpha x(t_{n+1}^-) \\ &= \alpha e^{a(t_{n+1}-t_n)} x_n, \end{aligned}$$

por lo que queda así definida una solución discreta del sistema impulsivo lineal homogéneo

$$x_{n+1} = \alpha e^{a(t_{n+1}-t_n)} x_n.$$

La expresión anterior define una ecuación en diferencias finitas, cuya solución puede deducirse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha e^{a(t_1-t_0)} x_0, \\ x_2 &= \alpha e^{a(t_2-t_1)} x_1 \\ &= \alpha e^{a(t_2-t_1)} \alpha e^{a(t_1-t_0)} x_0 \\ &= \alpha^2 e^{a(t_2-t_0)} x_0, \\ \\ x_3 &= \alpha e^{a(t_3-t_2)} x_2 \\ &= \alpha e^{a(t_3-t_2)} \alpha^2 e^{a(t_2-t_0)} x_0 \\ &= \alpha^3 e^{a(t_3-t_0)} x_0. \end{aligned}$$

Así, inductivamente conseguimos la solución para esta ecuación discreta. A saber

$$(1.3) \quad x_n = \alpha^n e^{a(t_n-t_0)} x_0.$$

Es importante recalcar que la ecuación en diferencias es parte del sistema impulsivo. El sistema en cuestión tiene, por ende, una parte discreta y otra ordinaria. Es por esto que los sistemas impulsivos forman parte de los llamados "sistemas híbridos".

Entonces, al reemplazar (1.3) en (1.2) se obtiene

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{a(t-t_n)} x_n \\ &= e^{a(t-t_n)} \alpha^n e^{a(t_n-t_0)} x_0 \\ &= e^{a(t-t_0)} \alpha^n x_0, \end{aligned}$$

y asumiendo que t_0 no corresponde a un instante de impulso, se tiene

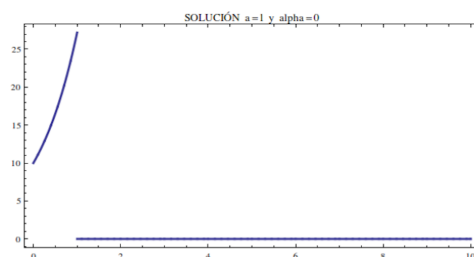
$$(1.4) \quad x(t) = e^{a(t-t_0)} \alpha^{i(t_0,t)} x_0,$$

donde $i(t_0, t)$ representa a la cantidad de instantes de impulsos en el intervalo $[t_0, t)$.

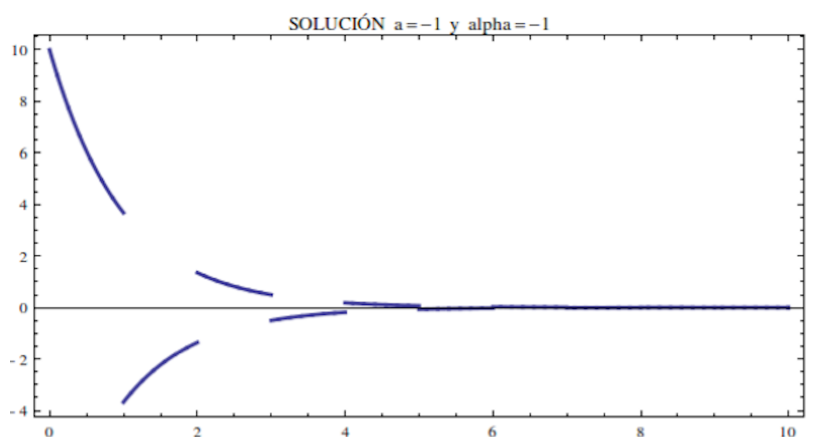
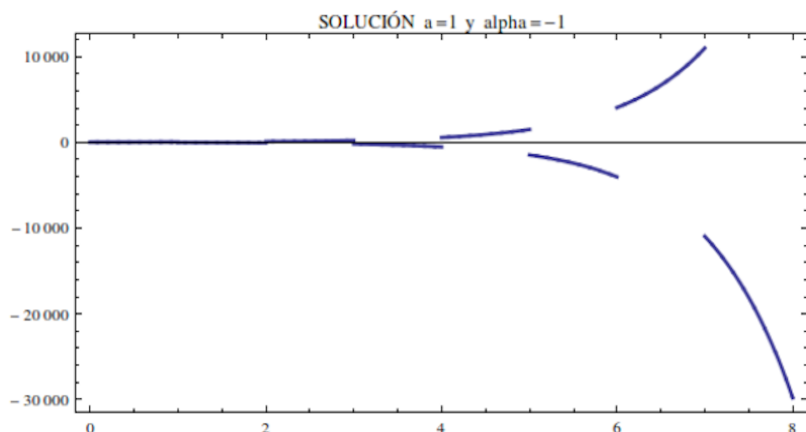
1.1.1. *Observaciones:* De (1.4) podemos concluir lo siguiente:

- La solución se obtiene "multiplicando las soluciones fundamentales" tanto de la parte ordinaria del sistema $e^{a(t-t_n)}$ como de la discreta $\alpha^n e^{a(t_n-t_0)}$.
- Obviamente $\alpha \neq 1$ a fin de que exista fenómeno impulsivo. Si no, el salto sería nulo. En dicho caso se hablaría de un sistema completamente ordinario.
- Si $\alpha = 0$, $x_0 = 10$ y $t_0 < t_1$ con t_1 instante de impulso, entonces se tiene que $x(t) = 0$ para todo $t \geq t_1$. Su solución es

$$x(t) = \begin{cases} e^{a(t-t_0)}x_0 & \text{si } t_0 \leq t < t_1. \\ 0 & \text{si } t_1 < t. \end{cases}$$



- Si $\alpha < 0$, entonces se tendrán soluciones oscilantes.



- El índice contador de impulsos $i(t_0, t)$ juega un papel preponderante en el comportamiento de la solución. Es decir, la "distribución de los instantes de impulso" también es un factor a considerar.

Esto motiva a la siguiente pregunta: ¿Puede ser "derrotada" la exponencial por la potencia discreta?

1.2. Algo sobre estabilidad de sistemas impulsivos. Un ejemplo de la importancia de la última de las observaciones anteriores lo veremos al analizar el comportamiento de la solución para t muy grande, con $\alpha \neq 0$ y $a \neq 0$ (estabilidad de las soluciones). En lo que sigue obtendremos una condición que permite asegurar que la solución del sistema impulsivo homogéneo tienda a 0 cuando $t \rightarrow \infty$. Reescribamos (1.4) de la forma

$$(1.5) \quad x(t) = e^{a(t-t_0)} e^{i(t_0, t) \text{Log}(\alpha)} x_0,$$

donde

$$\text{Log}(\alpha) = \ln(|\alpha|) + i \arg(\alpha).$$

Ahora, para todo $t \in \mathbb{R}^+$, existe $i(t) \in \mathbb{N}$ es tal que $t \in I_{i(t)} = [t_{i(t)}, t_{i(t)+1})$, con $t_{i(t)}$ instante de impulso. Luego, si se asume que los instantes de impulso tienen la siguiente distribución

$$\underline{\theta} \leq t_{k+1} - t_k \leq \bar{\theta},$$

entonces

$$\begin{aligned} \underline{\theta} &\leq t - t_{i(t)} \\ 2\underline{\theta} &\leq t - t_{i(t)-1} = t - t_{i(t)} + t_{i(t)} - t_{i(t)-1} \\ 3\underline{\theta} &\leq t - t_{i(t)-2} = t - t_{i(t)-1} + t_{i(t)-1} - t_{i(t)-2}. \end{aligned}$$

Con lo anterior, inductivamente se obtiene

$$(n+1)\underline{\theta} \leq t - t_{i(t)-n}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

es decir

$$(1.6) \quad i(t_0, t)\underline{\theta} \leq t - t_0 \implies i(t_0, t) \leq \frac{t - t_0}{\underline{\theta}}.$$

Luego, aplicando (1.6) en (1.5) se obtiene

$$\begin{aligned} |x(t)| &\leq e^{a(t-t_0) + \frac{t-t_0}{\underline{\theta}} \text{Log}(\alpha)} |x_0| \\ &\leq e^{(t-t_0)(a + \frac{1}{\underline{\theta}} \ln(|\alpha|))} |x_0|. \end{aligned}$$

Es decir, si

$$(1.7) \quad a + \frac{1}{\underline{\theta}} \ln(|\alpha|) < 0,$$

las soluciones se irán a 0 cuando $t \rightarrow \infty$.

Esta construcción nos muestra que, a pesar de que pudiese ocurrir $a \geq 1$, es posible que debido al efecto impulsivo, las soluciones del sistema puedan ser acotadas. Más aún, tender a 0 cuando $t \rightarrow \infty$. Lo anteriormente expuesto refleja un hecho muy particular, por lo que a nivel de estabilidad los sistemas impulsivos difieren del tratamiento ordinario. (Ver [22]).

Pregunta: qué sucede si $\alpha < 0$?

1.3. Ejemplos de sistemas estables. Consideremos el sistema

$$(1.8) \quad \begin{aligned} x'(t) &= x(t), & t &\neq t_k \\ x(t_k) &= (0.3)x(t_k^-) & t &= t_k \\ x(0) &= 1000 \\ t_k &= k, & \forall k &\geq 1, \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

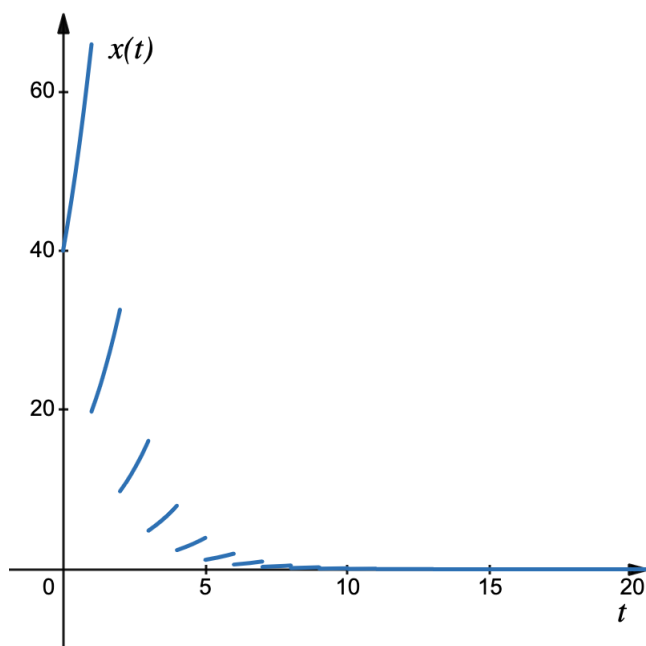
Se comprueba que

$$\begin{aligned} 1 &\leq t_{k+1} - t_k \implies \underline{\theta} = 1 \\ a &= 1, \quad \alpha = 0.3, \end{aligned}$$

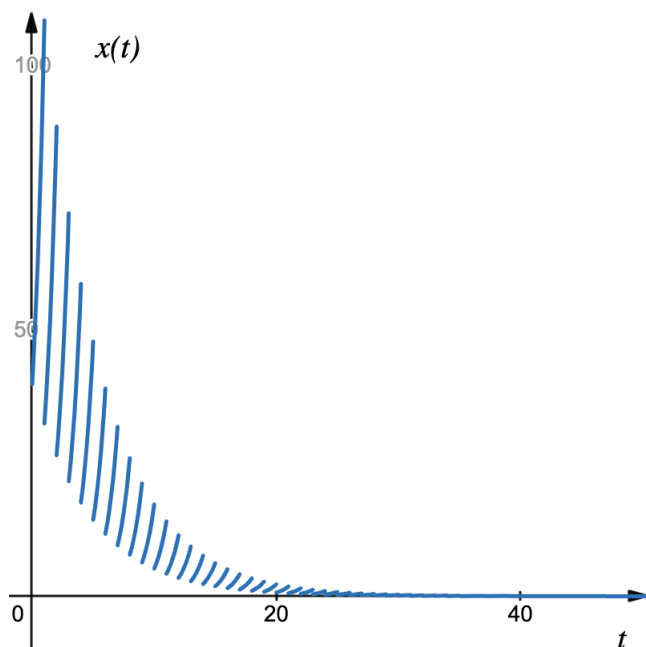
y

$$1 + \ln(0.3) = -1.203972804... < 0,$$

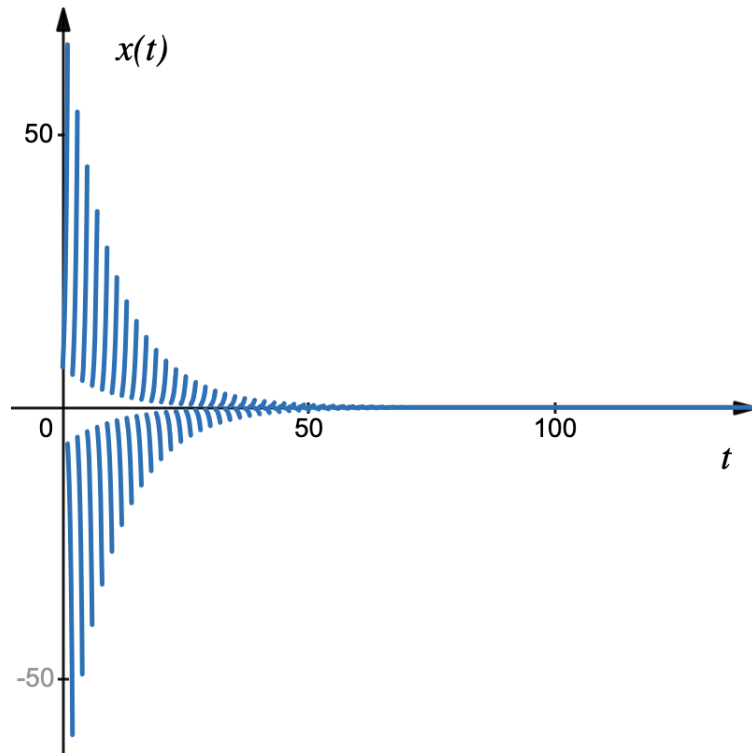
por lo que sus soluciones, según el resultado anterior, debieran tender a 0 cuando $t \rightarrow \infty$. Así lo podemos observar en la siguiente gráfica



Otro ejemplo, similar a (1.8), en donde se describe una situación más esperable; con $\alpha = 0.3$ y $a = 0.5$, es el siguiente

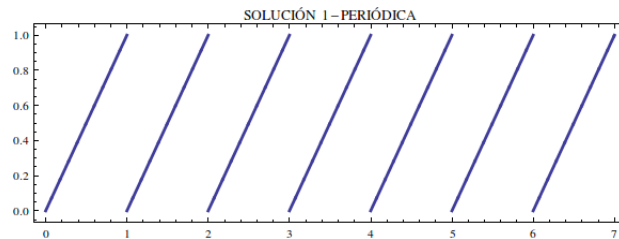


Finalmente, observemos (1.8) con $\alpha = -0.1$ y $a = 2.2$, es el siguiente



En el siguiente ejemplo, los impulsos generan una solución periódica impulsiva, a pesar de que el sistema ordinario no sea periódico ni acotado

$$\begin{aligned} p'(t) &= 1, & t &\neq t_k \\ p(t_i) &= p(t_i^-) - 1, & t &= t_k \\ p(0) &= 0 \\ t_k &= k, & \forall k &\geq 1, k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$



1.4. Ecuaciones lineales en diferencias finitas. A continuación, dado que hemos sido testigos del carácter híbrido de las ecuaciones diferenciales impulsivas, presentaremos la solución de la ecuación en diferencias finitas lineal homogénea y la fórmula de variación de parámetros para el caso lineal no homogéneo.

Ellas serán de utilidad para poder encontrar la solución explícita de los sistemas impulsivos lineales.

A fin de describir los sistemas impulsivos, durante el resto de este apunte usaremos la siguiente convención para el producto y la suma:

$$\prod_{r=j}^k A_r = \begin{cases} A_j \cdot A_{j+1} \cdot \dots \cdot A_k & \text{si } j \leq k \\ 1 & \text{si } j > k \end{cases},$$

$$\sum_{r=j}^k A_r = \begin{cases} A_j + A_{j+1} + \dots + A_k & \text{si } j \leq k \\ 0 & \text{si } j > k \end{cases}.$$

1.4.1. Ecuación en diferencias lineal homogénea. Sea la ecuación en diferencias finitas

$$\begin{aligned} x(n+1) &= a(n)x(n) \\ x(n_0) &= x_0, \quad n \geq n_0 \geq 0 \end{aligned}$$

donde $a(n) \neq 0$ y a a valores reales definida para $n \geq n_0 \geq 0$.

No es difícil deducir que su solución es

$$x(n) = \left(\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i) \right) x_0.$$

1.4.2. Ecuación en diferencias lineal no-homogénea. Sea la ecuación en diferencias finitas

$$\begin{aligned} y(n+1) &= a(n)y(n) + g(n) \\ y(n_0) &= y_0, \quad n \geq n_0 \geq 0 \end{aligned}$$

donde $a(n) \neq 0$ y $a(n), g(n)$ son funciones a valores reales definidas para $n \geq n_0 \geq 0$.

Con un poco de trabajo algebraico, se tiene que su solución es

$$y(n) = \left(\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i) \right) y_0 + \sum_{r=n_0}^{n-1} \left(\prod_{i=r+1}^{n-1} a(i) \right) g(r).$$

2. Ecuaciones diferenciales impulsivas

Una *Ecuación Diferencial Impulsiva* es una ecuación de la forma:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} x'(t) &= f(t, x(t)), & t &\neq t_k, \\ \Delta x(t_k) &= Q_k(x(t_k^-)), & t &= t_k, \\ x(\tau) &= x_0, & t &= \tau, \end{aligned}$$

donde Q_k es un operador de salto (que asumiremos inyectivo), $(t_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ es tal que $t_k < t_{k+1}, \forall k \in \mathbb{Z}$ y $\lim_{k \rightarrow \pm\infty} t_k = \pm\infty$. Esta sucesión corresponde a la llamada *sucesión de instantes de impulsos*. La condición del límite quiere decir que el fenómeno impulsivo se distribuye a lo largo de la recta, por lo que los impulsos persisten en el tiempo.

Definición 1. Diremos que una función $x(t)$ es solución de la ecuación diferencial impulsiva si:

- (i) $x(t)$ es continua en cada intervalo de la forma $I_k = [t_k, t_{k+1})$, $\forall k \in \mathbb{N}$.
- (ii) La derivada $x'(t)$ existe en cada punto $t \in I = [\tau, \infty)$ con posibles excepciones en los puntos $t_k, k \in \mathbb{N}$, donde existe la derivada izquierda.
- (iii) En cada intervalo I_k , la ecuación diferencial ordinaria

$$x'(t) = f(t, x(t))$$

es satisfecha.

- (iv) Para $t = t_k$, La solución satisface la condición de salto

$$\Delta x(t_k) = x(t_k) - x(t_k^-) = Q_k(x(t_k^-)),$$

donde

$$x(t_k^-) = \lim_{\substack{t \rightarrow t_k \\ t < t_k}} x(t)$$

existe $\forall t_k$ con $k \in \mathbb{N}$ y $x(t_k)$ está definido de manera única por

$$x(t_k) = x(t_k^-) + Q_k(x(t_k^-)).$$

2.1. Ecuación integral asociada. A continuación, mostraremos un resultado que nos será útil más adelante y que corresponde a otra forma de expresar la solución de (2.1).

Teorema 1. *Sea una función $x(t) = (t, \tau)$, donde τ es un número real fijo, es una solución de (2.1) en $[\tau, \infty[$ si y solo si satisface la siguiente ecuación integral*

$$(2.2) \quad x(t) = x(\tau) + \int_{\tau}^t f(s, x(s))ds + \sum_{\tau \leq t_k \leq t} Q_k(x(t_k^-)).$$

Intentaremos vislumbrar la demostración y su naturaleza inductiva.

Sea la ecuación diferencial impulsiva

$$(2.3) \quad \begin{aligned} x'(t) &= f(t, x(t)), & t \neq t_k, \\ \Delta x(t_k) &= Q_k(x(t_k^-)), & t = t_k, \\ x(t) &= x_0. \end{aligned}$$

Consideremos el intervalo $t \in [\tau, t_1[$

Integrando la ecuación diferencial ordinaria, obtenemos

$$x(t) = x(\tau) + \int_{\tau}^t f(s, x(s))ds$$

Ahora, queremos ver qué es $x(t_1)$. Para ello, aplicando el límite a la expresión anterior, obtenemos:

$$x(t_1^-) = x(\tau) + \int_{\tau}^{t_1} f(s, x(s))ds$$

Así, vemos que

$$\Delta x(t_1)x = x(t_1) - x(t_1^-) = Q_1(x(t_1^-)).$$

Luego obtenemos

$$x(t_1) = x(t_1^-) + Q_1(x(t_1^-)),$$

por lo que se tendrá

$$(2.4) \quad x(t_1) = x(\tau) + \int_{\tau}^{t_1} f(s, x(s))ds + Q_1(x(t_1^-)).$$

Ahora analizaremos análogamente el intervalo $t \in [t_1, t_2[$

integrando

$$x(t) = x(t_1) + \int_{t_1}^t f(s, x(s))ds$$

Pero, ¿quién es el $x(t_1)$? Sabemos que $x(t_1)$ está dado por (2.4), por lo que reemplazando, se obtiene $x(t)$

$$x(t) = x(\tau) + \int_{\tau}^t f(s, x(s))ds + Q_1(x(t_1^-))ds.$$

Consideremos ahora, el intervalo $t \in [t_1, t_2[$. Integrando (2.1) en dicho intervalo y evaluando el límite lateral, se tiene

$$x(t_2^-) = x(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} f(s, x(s))ds + Q_1(x(t_1^-)).$$

pero sabemos que

$$\Delta x(t_2) = x(t_2) - x(t_2^-) = Q_2(x(t_2^-))$$

Así obtenemos lo siguiente

$$x(t_2) = x(\tau) + \int_{\tau}^{t_2} f(s, x(s))ds + \sum_{i=1}^2 Q_i(x(t_i^-))$$

Por todo lo anterior, es posible definir una recurrencia. Así, inductivamente, para $t \in [\tau, t_{k(t)+1}[$, tenemos que

$$x(t) = x(\tau) + \int_{\tau}^t f(s, x(s)) ds + \sum_{\tau \leq t_k \leq t} Q_k(x(t_k^-))$$

Ahora que sabemos que las ecuaciones impulsivas muestran fuertemente su carácter híbrido, formalizaremos la solución inductiva anterior usando el lenguaje de las ecuaciones en diferencias:

Demostración. Consideremos el intervalo $I_n = [t_n, t_{n+1}]$. Si integramos (2.3) en este intervalo, se obtiene que

$$(2.5) \quad x(t) = x(t_n) + \int_{t_n}^t f(s, x(s)) ds.$$

Evaluando en $t = t_{n+1}$ obtenemos

$$x(t_{n+1}^-) = x(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(s, x(s)) ds.$$

Aplicando la condición impulsiva

$$\Delta x(t_{n+1}) = x(t_{n+1}) - x(t_{n+1}^-) = Q_{n+1}(x(t_{n+1}^-)),$$

se sigue que

$$x(t_{n+1}) = x(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(s, x(s)) ds + Q_{n+1}(x(t_{n+1}^-)).$$

Luego, resolviendo la ecuación en diferencias finitas, obtenemos

$$x(t_n) = x_0 + \int_{\tau}^{t_{i(\tau)+1}} f(s, x(s)) ds + \sum_{k=i(\tau)+1}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(s, x(s)) ds + \sum_{k=i(\tau)+1}^n Q_k(x(t_k^-)),$$

donde $i(t) = n \in \mathbb{Z}$ es el único entero tal que $t \in I_n = [t_n, t_{n+1}[$.

A continuación, aplicando la expresión anterior en (2.5), obtenemos

$$x(t) = x_0 + \int_{\tau}^{t_{i(\tau)+1}} f(s, x(s)) ds + \sum_{k=i(\tau)+1}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(s, x(s)) ds + \sum_{\tau \leq t_k < t} Q_k(x(t_k^-)) + \int_{t_n}^t f(s, x(s)) ds.$$

Finalmente, como

$$\int_{\tau}^t f(s, x(s)) ds = \int_{\tau}^{t_{i(\tau)+1}} f(s, x(s)) ds + \sum_{k=i(\tau)+1}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(s, x(s)) ds + \int_{t_n}^t f(s, x(s)) ds,$$

y reemplazando esta expresión en la ecuación anterior, obtenemos (2.2), por lo tanto, la demostración queda completa. ■

2.2. Desigualdad Impulsiva del tipo Gronwall-Bellman. Una herramienta extremadamente útil para demostrar unicidad y estabilidad de soluciones será la siguiente:

Teorema 2. Sea I un intervalo. Sean $u, \eta_1 : I \rightarrow [0, \infty)$ tal que u, η_1 son funciones continua; η_1 función localmente integrable y $\eta : \{t_i\} \rightarrow [0, \infty)$. Sea además, α una constante no negativa. Asumamos que $\forall t \geq \tau$ se cumplen

$$u(t) \leq u(\tau) + \int_{\tau}^t \eta_1(s)u(s)ds + \sum_{\tau \leq t_i < t} \eta(t_i)u(t_i^-).$$

Entonces, para $\forall t \geq \tau$ se satisface la siguiente desigualdad

$$u(t) \leq \left(\prod_{\tau \leq t_i < t} (1 + \eta(t_i)) \right) \exp \left(\int_{\tau}^t \eta_1(s)ds \right) u(\tau)$$

Demostración. Consideremos

$$v(t) \leq u(\tau) + \int_{\tau}^t \eta_1(s)u(s)ds + \sum_{\tau \leq t_i < t} \eta(t_i)u(t_i^-).$$

Denotaremos al miembro derecho como

$$v(t) = \alpha + \int_{\tau}^t \eta_1(s)u(s)ds + \sum_{\tau \leq t_i < t} \eta(t_i)u(t_i^-).$$

Sabemos que se tiene que $u(\tau) = v(\tau)$. Luego $u(t) \leq v(t) \forall t \geq \tau$. Ahora al derivar $v(t)$ obtenemos

$$v'(t) = \eta_1(t)u(t).$$

Por hipótesis, dado que $u(t) \leq v(t)$, se tiene

$$v'(t) \leq \eta_1(t)v(t).$$

Integrando la expresión anterior entre τ y t se obtiene

$$v(t) \leq v(\tau) + \int_{\tau}^t \eta_1(s)v(s)ds$$

Ahora, si consideramos $\tau = t_k$ se obtiene

$$v(t) \leq v(t_k) + \int_{t_k}^t \eta_1(s)v(s)ds$$

Aplicando el clásico lema Bellman-Gronwall a la desigualdad anterior, se obtiene lo siguiente:

$$(2.6) \quad v(t) \leq v(t_k) \exp \left(\int_{t_k}^t \eta_1(s)ds \right).$$

Luego, evaluando $t = t_{k+1}^-$ en (2.6), se obtiene

$$(2.7) \quad v(t_{k+1}^-) \leq v(t_k) \exp \left(\int_{t_k}^{t_{k+1}^-} \eta_1(s)ds \right).$$

Recordamos que para definir $v(t_{k+1})$ debemos considerar $v(t_{k+1}^-)$ y el operador de impulso o salto. Así, al multiplicar a ambos lados de la desigualdad $(1 + \eta(t_{k+1}))$, se obtiene

$$(2.8) \quad v(t_{k+1}) \leq (1 + \eta(t_{k+1}))v(t_k) \exp \left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} \eta_1(s)ds \right)$$

Lo anterior define una desigualdad de Gronwall-Bellman del tipo discreta, cuya solución es:

$$(2.9) \quad v(t_k) \leq \left(\prod_{k=i(\tau)+1}^k (1 + \eta(t_k)) \right) \exp \left(\int_{\tau}^{t_k} \eta_1(s)ds \right) v(\tau)$$

Ahora, si reemplazamos (2.9) en (2.6) se obtiene

$$v(t) \leq \left(\prod_{k=i(\tau)+1}^k (1 + \eta(t_k)) \right) \exp \left(\int_{\tau}^{t_k} \eta_1(s) ds \right) \exp \left(\int_{t_k}^t \eta_1(s) ds \right) \nu(\tau)$$

Como bien sabemos $u(t) \leq \nu(t) \forall t \geq \tau$ y $u(\tau) = \nu(\tau)$ se tiene

$$u(t) \leq \left(\prod_{k=i(\tau)+1}^k (1 + \eta(t_k)) \right) \exp \left(\int_{\tau}^t \eta_1(s) ds \right) u(\tau)$$

obteniéndose el resultado deseado. ■

2.3. Existencia y Unicidad de soluciones. En esta sección, demostramos la existencia y unicidad de soluciones para

$$(2.10) \quad \begin{aligned} x'(t) &= f(t, x(t)), & t \neq t_k \\ \Delta x(t_k) &= Q_k(x(t_k^-)), & t = t_k, \end{aligned}$$

en $[\tau, \infty)$, mediante un argumento inductivo sobre cada intervalo de la forma $I_r = [t_r, t_{r+1})$ y utilizando la desigualdad tipo Grönwall-Bellman del Teorema 2 demostrada anteriormente.

A continuación presentamos las hipótesis principales que se utilizarán en el resto de esta sección. Sea $|\cdot|$ una norma adecuada, $\|\cdot\|_\infty$ la norma supremo, $f : [0, \infty[\times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ y $Q_k : \{t_k\} \rightarrow \mathbb{C}^n$ funciones continuas que satisfacen:

(H1) (a) Existen funciones integrables $\lambda_i(t)$, $i = 1, 2$, definidas en $I = [\tau, \infty)$, tales que para todo $(t, x(t), x(\gamma(t))) \in I \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$, se cumple

$$|f(t, x(t))| \leq \lambda_1(t)|x(t)| + \lambda_2(t).$$

(b) Existe una sucesión sumable de números no negativos $(\mu_k^i)_{k=1}^\infty$, con $i = 1, 2$, tal que para todo $x \in \mathbb{C}^n$, se cumple

$$|Q_k(x(t_k^-))| \leq \mu_k^1|x(t_k^-)| + \mu_k^2, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

(H2) (a) La función $f(t, 0, 0)$ es integrable en I , y existe una función integrable $\lambda_1(t)$ en I , tal que para todo $(t, x(t))$ y $(t, y(t))$ en $I \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$, se tiene

$$|f(t, x(t)) - f(t, y(t))| \leq \lambda_1(t)|x(t) - y(t)|.$$

(b) La función $Q_k(0)$ es sumable en I , y existe una sucesión sumable de números reales no negativos $(\tilde{\mu}_k)_{k=1}^\infty$ tal que para todo $x, y \in \mathbb{C}^n$, se cumple

$$|Q_k(x(t_k^-)) - Q_k(y(t_k^-))| \leq \tilde{\mu}_k|x(t_k^-) - y(t_k^-)|, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

(H3) Las función $\lambda_1(t)$ también satisface

$$\nu_k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \lambda_1(s) ds \leq \nu := \sup_{k \in \mathbb{N}} \nu_k < 1.$$

2.3.1. Unicidad.

Teorema 3. Consideremos el problema de valor inicial para (2.10) con $x(t, \tau, x_0)$. Bajo las condiciones (H1)–(H3) existe una única solución x de (2.10) en $[\tau, \infty)$. Además, toda solución es estable.

Demostración. Sean x_1, x_2 dos soluciones de (2.10) en $[\tau, \infty)$. Entonces, por el Teorema 1, (H1) y (H2), tenemos

$$(2.11) \quad r(t) \leq r(\tau) + \int_{\tau}^t \lambda_1(s)r(s)ds + \sum_{\tau \leq t_k < t} \tilde{\mu}_k(t_k)r(t_k^-)$$

donde $r(t) = \|x_1(t) - x_2(t)\|$. Ahora, aplicando la desigualdad de Gronwall-Bellman antes mostrada a la expresión anterior, se prueba la estabilidad. Si $r(\tau) = 0$, entonces $r(t) = 0$, $\forall t \in [\tau, \infty)$. Por lo tanto, la unicidad queda demostrada. ■

2.3.2. Existencia de solución para (2.10) en $[\tau, t_r)$.

Lema 1. Consideremos el problema de valor inicial para (2.10) con $x(t, \tau, x_0)$. Sean satisfechas las condiciones (H1)–(H3) y el Teorema 1. Entonces, para cada $x_0 \in \mathbb{C}^n$, existe una solución $x(t) = x(t, \tau, x_0)$ de (2.10) en $[\tau, t_r)$ tal que $x(\tau) = x_0$.

Demostración. En el intervalo $[\tau, t_r)$, con $t_r = t_{i(\tau)+1}$, por el Teorema 1, el sistema (2.10) puede escribirse como

$$(2.12) \quad x(t) = x_0 + \int_{\tau}^t f(s, x(s)) ds.$$

Probaremos la existencia utilizando el método de aproximaciones sucesivas. Consideremos la secuencia de funciones $\{x_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $x_0(t) = x_0$ y

$$(2.13) \quad x_{n+1}(t) = x_0 + \int_{\tau}^t f(s, x_n(s)) ds, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Podemos ver que

$$\begin{aligned} \|x_1 - x_0\|_{\infty} &\leq \int_{\tau}^t |f(s, x_0(s))| ds \\ &\leq \|x_0\|_{\infty} \int_{\tau}^t \lambda_1(s) ds \\ &= \|x_0\|_{\infty} \nu, \end{aligned}$$

donde ν está definido en (H3), y

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x_n\|_{\infty} &\leq \int_{\tau}^t \lambda_1(s) |x_n(s) - x_{n-1}(s)| ds \\ &\leq \|x_n - x_{n-1}\|_{\infty} \int_{\tau}^t \lambda_1(s) ds \\ &= \|x_n - x_{n-1}\|_{\infty} \nu. \end{aligned}$$

Así, por inducción matemática deducimos que

$$\|x_{n+1} - x_n\|_{\infty} \leq \|x_0\|_{\infty} \nu^{n+1}.$$

Por lo tanto, usando (H3), la secuencia $\{x_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es convergente, y su límite $x(t)$ satisface (2.12) en $[\tau, t_r]$, por lo tanto, la existencia queda demostrada. ■

Podemos extender el lema anterior a $[\tau, \infty)$, para obtener la existencia y unicidad de soluciones para (2.10) en $[\tau, \infty)$.

Teorema 4. *Supongamos que se cumplen las condiciones (H1)–(H3) y el Teorema 2. Entonces, para $(\tau, x_0) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{C}^n$, existe una solución única $x(t) = x(t, \tau, x_0)$ para $t \geq \tau$ de (2.10), tal que $x(\tau) = x_0$.*

Demostración. Evaluando en $t = t_r$ la ecuación (2.12) se obtiene

$$(2.14) \quad x(t_r^-) = x_0 + \int_{\tau}^{t_r} f(s, x(s)) ds.$$

Ahora, a partir de la condición impulsiva

$$\Delta x(t_r) = Q_r(x(t_r^-)),$$

tenemos

$$(2.15) \quad \begin{aligned} x(t_r) &= x(t_r^-) + Q_r(x(t_r^-)) \\ &= x_0 + \int_{\tau}^{t_r} f(s, x(s)) ds + Q_r(x(t_r^-)), \end{aligned}$$

ya que $x(t_r)$ está definido de manera única. Aplicamos entonces el Lema 1 al sistema $x(t) = x(t, t_r, x(t_r))$ definido en $[t_r, t_{r+1})$. Por lo tanto, se prueba la existencia en el último intervalo. Así, por inducción matemática, queda demostrada la existencia de una solución única de (2.10) en $[\tau, \infty)$. ■

3. Sistemas impulsivos lineales

A continuación, deduciremos la matriz fundamental del sistema lineal homogéneo impulsivo y, gracias a ella, encontraremos la fórmula de variación de parámetros para el sistema lineal no-homogéneo impulsivo.

3.1. Sistema impulsivo lineal homogéneo. En esta sección, estudiaremos las soluciones del sistema lineal impulsivo

$$(3.1) \quad \begin{aligned} x' &= A(t)x, & t &\neq t_i, \\ x(t_i) &= (I + B_i)x(t_i^-) & t &= t_i, \\ x(\tau) &= x_0, \end{aligned}$$

con $(t_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ sucesión de instantes de impulsos fijos tales que $t_i < t_{i+1}$ con $t_i \in \mathbb{R}$ y $\lim_{|i| \rightarrow \infty} t_i = \infty$, donde $A(t)$ es una matriz de $n \times n$ continua a trozos con discontinuidades de primera especie en $t = t_i$, B_i matrices constantes. Además, consideraremos el espacio PC y PC^1 de las funciones constantes a trozos continuas por la izquierda, es decir, tales que $x(t_i^-) = \lim_{\substack{t \rightarrow t_i \\ t < t_i}} x(t)$, existe $\forall i \in \mathbb{N}_0$.

En lo que sigue, se estudiarán sólo los sistemas para los cuales se satisfacen las siguientes condiciones:

- (1) Todo intervalo compacto $[a, b]$ contiene sólo un número finito de puntos de $(t_i)_{i=1}^{\infty}$.
- (2) Las matrices $(I + B_i)$ son invertibles $\forall i \in \mathbb{N}$.

3.1.1. Matriz fundamental de (3.1). A continuación deduciremos la matriz fundamental del sistema (3.1). Si analizamos el caso $t \in [t_{i(t)}, t_{i(t)+1})$ tenemos

$$(3.2) \quad x(t) = \Phi(t, t_{i(t)})x(t_{i(t)})$$

como solución en dicho intervalo. Ahora vemos que por la existencia del límite lateral izquierdo se tiene

$$x(t_{i(t)+1}^-) = \Phi(t_{i(t)+1}, t_{i(t)})x(t_{i(t)}).$$

Luego, debido a la condición impulsiva, se consigue

$$\begin{aligned} x(t_{i(t)+1}) &= (I + B_{i(t)+1})x(t_{i(t)+1}^-) \\ &= (I + B_{i(t)+1})\Phi(t_{i(t)+1}, t_{i(t)})x(t_{i(t)}). \end{aligned}$$

Lo anterior define una ecuación en diferencias finitas, cuya solución es

$$(3.3) \quad x(t_{i(t)}) = \left(\prod_{j=i(\tau)+1}^{i(t)} (I + B_j) \Phi(t_j, t_{j-1}) \right) (I + B_{i(\tau)+1}) \Phi(t_{i(\tau)+1}, \tau)x_0.$$

Al reemplazar (3.3) en (3.2) se obtiene la solución de (3.1) para $t \in [t_0, t_{i(t)+1})$. A saber

$$x(t) = \Phi(t, t_{i(t)}) \left(\prod_{j=i(\tau)+1}^{i(t)} (I + B_j) \Phi(t_j, t_{j-1}) \right) (I + B_{i(\tau)+1}) \Phi(t_{i(\tau)+1}, \tau)x_0,$$

por lo que finalmente la matriz fundamental del sistema impulsivo lineal homogéneo corresponde a

$$(3.4) \quad \Psi(t, \tau) = \Phi(t, t_{i(t)}) \left(\prod_{j=i(\tau)+1}^{i(t)} (I + B_j) \Phi(t_j, t_{j-1}) \right) (I + B_{i(\tau)+1}) \Phi(t_{i(\tau)+1}, \tau)x_0.$$

Luego, toda solución del sistema (3.1) se puede escribir de la forma

$$(3.5) \quad x(t, \tau, x_0) = \Psi(t, \tau)x_0$$

Es importante notar que para el caso autónomo $A(t) = A$, $B_i = B$ donde las matrices B_i y A conmutan, se tiene que la solución (3.5) se escribe de la forma

$$(3.6) \quad x(t, \tau, x_0) = e^{A(t-\tau)} (I + B)^{i(t, \tau)} x_0$$

donde $i(t, \tau)$ corresponde al número de puntos t_i pertenecientes al intervalo $[\tau, t)$.

De esta manera, se puede apreciar que cuando $t \rightarrow \infty$ el comportamiento de las soluciones del sistema (3.1) para el caso $A(t) = A$ y $B_i = B$ depende de los valores propios de las matrices A e $I + B$ y de las propiedades de la sucesión $(t_i)_{i \in \mathbb{Z}}$. En particular, si los instantes t_i son equidistantes, es decir, forman una progresión aritmética

$$t_{i+1} = t_i + \theta, \quad i \in \mathbb{N}_0$$

se tiene inductivamente

$$(3.7) \quad t_i = \tau + i\theta, \quad i \in \mathbb{N}_0.$$

Ahora bien, si la matriz compleja $I + B$ es no singular, entonces $\text{Log}(I + B)$ existe. Luego, de (3.6) y (3.7) se tiene

$$\begin{aligned} x(t, \tau, x_0) &= e^{A(t-\tau) + \text{Log}(I+B)i(t,\tau)} x_0 \\ &= e^{A(t-\tau) + \text{Log}(I+B)\left[\frac{t-\tau}{\theta}\right]} x_0 \\ &= e^{A(t-\tau) + \text{Log}(I+B)\left(\frac{t-\tau}{\theta} - \left\{\frac{t-\tau}{\theta}\right\}\right)} x_0 \\ &= e^{-\text{Log}(I+B)\left\{\frac{t-\tau}{\theta}\right\}} e^{(A + \frac{1}{\theta}\text{Log}(I+B))(t-\tau)} x_0. \end{aligned}$$

Para el caso B_i y A no conmutativos, se tiene que la solución viene dada por la expresión

$$(3.8) \quad x(t, \tau, x_0) = e^{A(t-t_{i(t)})} \left(\prod_{j=i(\tau)+2}^{i(t)} (I + B_j) e^{A(t_j - t_{j-1})} \right) (I + B_{i(\tau)+1}) e^{A(t_{i(\tau)+1} - \tau)} x_0.$$

Ahora bien, de (3.8) y suponiendo que las matrices $\text{Log}(I + B)$ y A conmutan, vemos que

$$\begin{aligned} x(t, t_0, x_0) &= \left(e^{\text{Log}(I+B)} e^{A\theta} \right)^{\left[\frac{t-t_0}{\theta}\right]} x_0 \\ &= \left(e^{\text{Log}(I+B) + A\theta} \right)^{\left(\frac{t-t_0}{\theta} - \left\{\frac{t-t_0}{\theta}\right\}\right)} x_0 \\ &= e^{-\left\{\frac{t-t_0}{\theta}\right\}(\text{Log}(I+B) + A\theta)} e^{(A + \frac{1}{\theta}\text{Log}(I+B))(t-t_0)} x_0 \end{aligned}$$

con $\frac{t-t_0}{\theta} = \left\{\frac{t-t_0}{\theta}\right\} + \left[\frac{t-t_0}{\theta}\right]$, donde $\{\cdot\}$ y $[\cdot]$ corresponden a la parte fraccionaria y entera respectivamente.

Por ende, la estabilidad en ambos casos depende de la matriz

$$A + \frac{1}{\theta}\text{Log}(I + B),$$

pudiéndose afirmar que si las partes reales de todos los valores propios de esta matriz son negativos, entonces todas las soluciones de (3.1) irán a cero cuando $t \rightarrow \infty$.

A raíz de lo anteriormente expuesto, podemos apreciar el importante papel que cumplen los instantes de impulso y su distribución en el comportamiento de la solución.

3.2. Sistema impulsivo lineal no homogéneo. Ahora, analizaremos el sistema impulsivo lineal homogéneo asociado a (3.1). A saber

$$(3.9) \quad \begin{aligned} x' &= A(t)x + f(t), & t &\neq t_i, \\ x(t_i) &= (I + B_i)x(t_i^-) + h_i, & t &= t_i, \end{aligned}$$

con $f(t) \in PC(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, y $h_i \in \mathbb{R}^{n \times 1} \forall i \in \mathbb{N}$.

3.2.1. Fórmula de variación de parámetros. Nuestro objetivo será conseguir una fórmula de variación de parámetros para el sistema (3.9).

Sea $t \in [t_{i(t)}, t_{i(t)+1})$, dado que el sistema (3.9) es del tipo ordinario, por lo que al aplicar la fórmula de variación de parámetros en dicho intervalo conseguimos

$$(3.10) \quad x(t) = \Phi(t, t_{i(t)})x(t_{i(t)}) + \int_{t_{i(t)}}^t \Phi(t, s)f(s)ds.$$

Luego, se tiene

$$x(t_{i(t)+1}^-) = \Phi(t_{i(t)+1}, t_{i(t)})x(t_{i(t)}) + \int_{t_{i(t)}}^{t_{i(t)+1}} \Phi(t_{i(t)+1}, s)f(s)ds,$$

por lo que aplicando la condición impulsiva se tiene

$$\begin{aligned} x(t_{i(t)+1}) &= (I + B_{i(t)+1})x(t_{i(t)+1}^-) + h_{i(t)+1} \\ &= (I + B_{i(t)+1}) \left(\Phi(t_{i(t)+1}, t_{i(t)})x(t_{i(t)}) + \int_{t_{i(t)}}^{t_{i(t)+1}} \Phi(t_{i(t)+1}, s)f(s)ds \right) + h_{i(t)+1} \\ &= (I + B_{i(t)+1})\Phi(t_{i(t)+1}, t_{i(t)})x(t_{i(t)}) + \int_{t_{i(t)}}^{t_{i(t)+1}} (I + B_{i(t)+1})\Phi(t_{i(t)+1}, s)f(s)ds + h_{i(t)+1}. \end{aligned}$$

Lo anterior nuevamente define una ecuación en diferencias finitas, cuya solución es

$$\begin{aligned} x(t_{i(t)}) &= \left(\prod_{k=i(\tau)+2}^{i(t)} (I + B_k) \Phi(t_k, t_{k-1}) \right) (I + B_{i(\tau)+1}) \Phi(t_{i(\tau)+1}, \tau)x_0 \\ &+ \sum_{r=i(\tau)+2}^{i(t)} \left(\prod_{k=r+1}^{i(t)} (I + B_k) \Phi(t_k, t_{k-1}) \right) \left(\int_{t_{r-1}}^{t_r} (I + B_r) \Phi(t_r, s)f(s)ds \right) \\ &+ \left(\prod_{k=i(\tau)+2}^{i(t)} (I + B_k) \Phi(t_k, t_{k-1}) \right) \left(\int_{\tau}^{t_{i(\tau)+1}} (I + B_{i(\tau)+1}) \Phi(t_{i(\tau)+1}, s)f(s)ds \right) \\ &+ \sum_{r=i(\tau)+2}^{i(t)} \left(\prod_{k=r+1}^{i(t)} (I + B_k) \Phi(t_k, t_{k-1}) \right) h_r + \left(\prod_{k=i(\tau)+2}^{i(t)} (I + B_k) \Phi(t_k, t_{k-1}) \right) h_{i(\tau)+1}, \end{aligned}$$

la que en términos de la matriz fundamental (3.4) se reescribe como

$$(3.11) \quad x(t_{i(t)}) = \Psi(t_{i(t)}, \tau)x_0 + \int_{\tau}^{t_{i(t)}} \Psi(t_{i(t)}, s)f(s)ds + \sum_{\tau \leq t_r \leq t_{i(t)}} \Psi(t_{i(t)}, t_r)h_r.$$

Es importante recalcar que la expresión anterior define una solución discreta del sistema (3.9).

Ahora, al aplicar (3.11) en (3.10), se obtiene

$$x(t) = \Phi(t, t_{i(t)}) \left(\Psi(t_{i(t)}, \tau)x_0 + \int_{\tau}^{t_{i(t)}} \Psi(t_{i(t)}, s)f(s)ds + \sum_{\tau \leq t_r \leq t_{i(t)}} \Psi(t_{i(t)}, t_r)h_r \right) + \int_{t_{i(t)}}^t \Phi(t, s)f(s)ds$$

con

$$\Psi(t_{i(t)}, \tau) = \left(\prod_{j=i(\tau)+2}^{i(t)} (I + B_j) \Phi(t_j, t_{j-1}) \right) (I + B_{(\tau)+1}) \Phi(t_{(\tau)+1}, \tau).$$

Entonces, por (3.4), se tiene

$$\Psi(t, \tau) = \Phi(t, t_{i(t)}) \left(\prod_{j=i(\tau)+2}^{i(t)} (I + B_j) \Phi(t_j, t_{j-1}) \right) (I + B_{(\tau)+1}) \Phi(t_{(\tau)+1}, \tau),$$

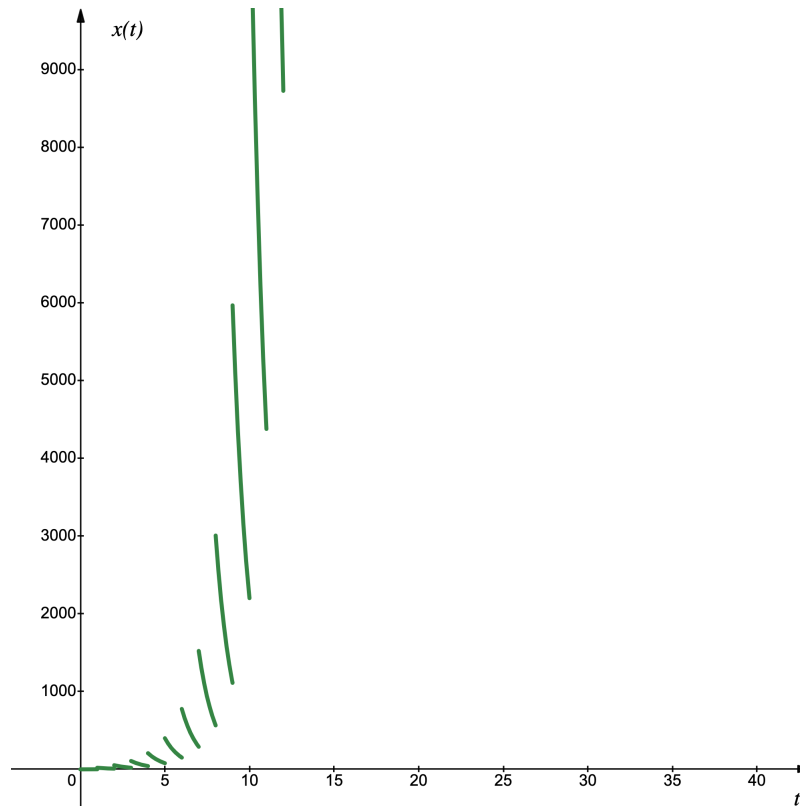
por lo que finalmente se consigue una fórmula de variación de parámetros para (3.9). A saber

$$(3.12) \quad x(t) = \Psi(t, \tau)x_0 + \int_{\tau}^t \Psi(t, s)f(s)ds + \sum_{\tau \leq t_r < t} \Psi(t, t_r)h_r,$$

con Ψ matriz fundamental del sistema lineal impulsivo homogéneo (3.1).

Ejemplo 1. *A continuación, pondremos en práctica lo que hemos visto. Resolvamos*

$$\begin{aligned} x'(t) &= -x(t) + t, & t \neq k, & \quad k \in \mathbb{N} \\ \Delta x(k) &= x(k) + 1, & t = k, & \\ x(0) &= 0. \end{aligned}$$



4. Equilibrio asintótico para un sistema de ecuaciones impulsivas

En [12], motivados por el estudio de enfermedades de transmisión vertical tales como la Gonorrea, *K.L. Cooke* y *J.A. Yorke* analizan el sistema

$$(4.1) \quad x'(t) = g(x(t)) - g(x(t - L)),$$

donde

- $x(t)$ representa al número de individuos de una población en el instante t ,
- $g(x(t))$ representa al número de nacimientos,
- $g(x(t - L))$ representa a mortalidad en el instante t , suponiendo que el período de vida de cada individuo es L .

De esta forma, la expresión

$$g(x(t)) - g(x(t - L))$$

representa la tasa de cambio de la población de una especie en el instante t . Los autores analizan los casos en los cuales g es una función del tipo Lipschitz global, y deducen la convergencia

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = k,$$

determinando así la existencia de un equilibrio para la población de la especie representada en (4.1), el que es independiente de la condición inicial del sistema en cuestión, lo que equivale a decir que las soluciones son convergentes.

Lo anteriormente expuesto muestra la enorme importancia de considerar sistemas que puedan estabilizarse para t muy grandes. Muchos son los casos de modelos de transmisión de enfermedades en los cuales es necesario establecer condiciones para conseguir una estabilización de la población infectada o la de extinción de la población de alguna plaga.

Es en este sentido que los sistemas impulsivos otorgan excelentes modelos de vacunación de poblaciones o de combate contra plagas.

En esta sección concluiremos la existencia de un **equilibrio asintótico** para la clase de sistemas IDE con tiempos fijos. En otras palabras, demostramos —basándonos firmemente en ciertas condiciones de integrabilidad, una desigualdad del tipo de Grönwall-Bellman y el teorema del punto fijo de Banach— que toda solución de

$$(4.2) \quad \begin{aligned} x'(t) &= f(t, x(t)), & t \neq t_k \\ \Delta x(t_k) &= Q_k(x(t_k^-)), & t = t_k \end{aligned}$$

con condición inicial $x(a) = x_0$, donde $a \geq \tau$, satisface

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \xi,$$

para algún $\xi \in \mathbb{C}^n$, y tiene la siguiente fórmula asintótica:

$$x(t) = \xi + \mathcal{O} \left(\sum_{i=1}^2 \int_t^\infty \lambda_i(s) ds + \sum_{t \leq t_k < \infty} (\mu_k^1 + \mu_k^2) \right),$$

donde λ_i y μ_k son constantes de Lipschitz asociadas a f y Q_k , respectivamente.

Estos resultados pueden ser encontrados en el trabajo de Patricio González y Manuel Pinto [18].

4.1. **Equilibrio asintótico.** Sea

$$B(0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tal que } |x| < r\},$$

donde $|\cdot|$ es alguna norma en \mathbb{R}^n .

Definición 2. Decimos que el sistema de ecuaciones diferenciales impulsiva .

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(t, x(t)), & t &\neq t_k \\ \Delta x(t_k) &= Q_k(x(t_k^-)), & t &= t_k \\ x(\tau) &= x_0 & t &= \tau \end{aligned}$$

definida en $[\tau, \infty)$ tiene un **equilibrio asintótico** si :

(i) Existe $r > 0$ tal que para cada $a \geq \tau$, ecuación (2.1) con condición inicial $x(a) = x_0$ tiene una solución $x(t)$ definida en $[a, \infty)$ que satisface

$$(4.3) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \xi, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

(ii) Para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ existe $a \in I = [\tau, \infty)$ y una solución $x(t)$ de la ecuación diferencial impulsiva definida en $[a, \infty)$ que satisface (4.3).

Volveremos a usar las hipótesis dadas por (H1) – (H2):

(H1) (a) Existen funciones integrables $\lambda_i(t)$, $i = 1, 2$, definidas en $I = [\tau, \infty)$, tales que para todo $(t, x(t), x(\gamma(t))) \in I \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$, se cumple

$$|f(t, x(t))| \leq \lambda_1(t)|x(t)| + \lambda_2(t).$$

(b) Existe una sucesión sumable de números no negativos $(\mu_k^i)_{k=1}^\infty$, con $i = 1, 2$, tal que para todo $x \in \mathbb{C}^n$, se cumple

$$|Q_k(x(t_k^-))| \leq \mu_k^1|x(t_k^-)| + \mu_k^2, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

(H2) (a) La función $f(t, 0, 0)$ es integrable en I , y existe una función integrable $\lambda_1(t)$ en I , tal que para todo $(t, x(t))$ y $(t, y(t))$ en $I \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$, se tiene

$$|f(t, x(t)) - f(t, y(t))| \leq \lambda_1(t)|x(t) - y(t)|.$$

(b) La función $Q_k(0)$ es sumable en I , y existe una sucesión sumable de números reales no negativos $(\tilde{\mu}_k)_{k=1}^\infty$ tal que para todo $x, y \in \mathbb{C}^n$, se cumple

$$|Q_k(x(t_k^-)) - Q_k(y(t_k^-))| \leq \tilde{\mu}_k|x(t_k^-) - y(t_k^-)|, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Teorema 5. Supongamos que se cumple la condición (H1). Entonces, toda solución de (4.2) con condición inicial $x(a) = x_0$, donde $a \geq \tau$, satisface (4.3) para algún $\xi \in \mathbb{R}^n$, con error

$$(4.4) \quad x(t) = \xi + \mathcal{O} \left(\sum_{i=1}^2 \int_t^\infty \lambda_i(s) ds + \sum_{t \leq t_k < \infty} (\mu_k^1 + \mu_k^2) \right).$$

Demostración. Supongamos que $x(t)$ es una solución de (4.2) con condición inicial $x(a) = x_0$, donde $a \geq \tau$, definida sobre un subintervalo finito $J \subset [\tau, \infty)$. Entonces, por el Teorema 1, se satisface para todo $t \in J$:

$$\begin{aligned} |x(t)| &\leq |x_0| + \int_\tau^t |f(s, x(s))| ds + \sum_{\tau \leq t_k < t} |Q_k(x(t_k^-))| \\ &\leq |x_0| + \int_\tau^t \lambda_2(s) ds + \sum_{\tau \leq t_k < t} \mu_k^2 + \int_\tau^t \lambda_1(s)|x(s)| ds + \sum_{\tau \leq t_k < t} \mu_k^1|x(t_k^-)|. \end{aligned}$$

Luego, por la desigualdad Gronwall-Bellman impulsiva, se tiene:

$$|x(t)| \leq \left(|x_0| + \int_\tau^t \lambda_2(s) ds + \sum_{\tau \leq t_k < t} \mu_k^2 \right) \left(\prod_{\tau \leq t_k < t} (1 + \mu_k^1) \right) \exp \left(\int_\tau^t \lambda_1(s) ds \right).$$

Debido a la integrabilidad de los coeficientes, la solución está acotada, y por lo tanto puede extenderse más allá de $\sup J$.

Ahora, dado $\varepsilon > 0$, por la integrabilidad existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $t, s > N$, entonces:

$$\begin{aligned} |x(t) - x(s)| &\leq \int_s^t |f(u, x(u))| du + \sum_{t_k(s) \leq t_k < t} |Q_k(x(t_k^-))| \\ &\leq \int_s^t \lambda_1(u) |x(u)| du + \int_s^t \lambda_2(u) du + \sum_{t_k(s) \leq t_k < t} \mu_k^1 |x(t_k^-)| + \sum_{t_k(s) \leq t_k < t} \mu_k^2. \end{aligned}$$

Es decir,

$$|x(t) - x(s)| < \varepsilon.$$

Por el criterio de Cauchy, $x(t)$ converge a algún $\xi \in \mathbb{R}^n$. Esto prueba la condición (i) de equilibrio asintótico. \blacksquare

Teorema 6. *Supongamos que se cumple la condición (H2). Entonces, para cada $\xi \in \mathbb{R}^n$ existe $a \geq \tau$ y una solución $x(t)$ de (4.2) definida sobre $[a, \infty)$ que satisface (4.3).*

Demostración. Usando (H2), podemos escoger $a \geq \tau$ suficientemente grande tal que

$$\mathcal{L} = \int_a^\infty \lambda_1(s) ds + \sum_{a \leq t_k} \mu_k^1 < 1.$$

Consideramos el espacio de Banach \mathcal{B} de funciones acotadas $[a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$, con la norma

$$|f|_\infty = \sup_{t \geq a} |f(t)|.$$

Definimos el operador $T : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ por

$$(Tx)(t) = \xi - \int_t^\infty f(s, x(s)) ds - \sum_{t \leq t_k} Q_k(x(t_k^-)).$$

Gracias a la integrabilidad y sumabilidad de los coeficientes dada por (H1) – (H2), no es difícil ver que $T(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B}$

$$\begin{aligned} |(Tx)(t)| &\leq |\xi| + \int_t^\infty |f(s, x(s))| ds + \sum_{t \leq t_k} |Q_k(x(t_k^-))| \\ &\leq |\xi| + \int_t^\infty \lambda_1(s) |x(s)| ds + \int_t^\infty \lambda_2(s) ds + \sum_{t \leq t_k} \mu_k^1 |x(t_k^-)| + \sum_{t \leq t_k} \mu_k^2 \\ &\leq |\xi| + |x|_\infty \left(\int_t^\infty \lambda_1(s) ds + \sum_{t \leq t_k} \mu_k^1 \right) + \int_t^\infty \lambda_2(s) ds + \sum_{t \leq t_k} \mu_k^2. \end{aligned}$$

Además, por la integrabilidad de los coeficientes, se satisface

$$\begin{aligned} |(Tx)(t) - (Ty)(t)| &\leq \int_t^\infty \lambda_1(s) |x(s) - y(s)| ds + \sum_{t \leq t_k} \mu_k^1 |x(t_k^-) - y(t_k^-)| \\ &\leq |x - y|_\infty \left(\int_t^\infty \lambda_1(s) ds + \sum_{t \leq t_k} \mu_k^1 \right) \\ &= \mathcal{L} |x - y|_\infty. \end{aligned}$$

Luego, ya que $\mathcal{L} < 1$, por el teorema de punto fijo de Banach, T tiene un único punto fijo $x(t) \in \mathcal{B}$ tal que satisface

$$x(t) = \xi - \int_t^\infty f(s, x(s)) ds - \sum_{t \leq t_k} Q_k(x(t_k^-)), \quad \forall t \geq a.$$

De manera muy limpia vemos que (ii) es satisfecha y

$$x(t) = \xi' + \int_a^t f(s, x(s)) ds - \sum_{t > t_k} Q_k(x(t_k^-)),$$

donde

$$\xi' = \xi - \int_a^\infty f(s, x(s)) ds - \sum_{a \leq t_k} Q_k(x(t_k^-)),$$

tenemos que $x(t)$ cumple (4.2).

Además, se satisface:

$$\begin{aligned} |x(t) - \xi| &\leq \int_t^\infty |f(s, x(s))| ds + \sum_{t \leq t_k} |Q_k(x(t_k^-))| \\ &\leq K \left(\int_t^\infty \lambda_1(s) ds + \sum_{t \leq t_k} \mu_k^1 \right) + \int_t^\infty \lambda_2(s) ds + \sum_{t \leq t_k} \mu_k^2, \end{aligned}$$

teniéndose así, la siguiente fórmula asintótica:

$$x(t) = \xi + \mathcal{O} \left(\sum_{i=1}^2 \int_t^\infty \lambda_i(s) ds + \sum_{t \leq t_k < \infty} (\mu_k^1 + \mu_k^2) \right).$$

■

Corolario 1. Sean válidas las condiciones (H1) y (H2). Entonces existe un equilibrio asintótico global, es decir, para todo $a \geq \tau$ suficientemente grande, toda solución del sistema IDEPCAG:

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(t, x(t)), \quad t \neq t_k, \\ \Delta x(t_k) &= Q_k(x(t_k^-)), \quad t = t_k, \\ x(a) &= x_0, \end{aligned}$$

converge a algún $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Remark 1. Es importante notar que el resultado anterior es válido para cualquier $r > 0$ tal que $\|x\|_\infty \leq r$.

4.2. Ejemplo de equilibrio asintótico. En esta sección mostraremos algunos ejemplos que muestran la efectividad de nuestros resultados.

Ejemplo 2. Sea la ecuación diferencial impulsiva

$$(4.5) \quad \begin{aligned} x'(t) &= 0, \quad t \neq k \\ \Delta x(k) &= \frac{1}{3^k} x(k^-), \quad t = k, \quad k \in \mathbb{N}, \\ x(0) &= 1 \end{aligned}$$

No es difícil ver que se satisfacen todas las hipótesis del teorema requeridas, por lo que la ecuación (4.5) posee un equilibrio asintótico. Además, es importante notar que la solución es

$$x(t) = \prod_{k=1}^{r(t)} \left(1 + \frac{1}{3^k} \right)$$

donde $r(t)$ corresponde al único entero tal que $t \in I_r = [r, r + 1[$, $r \in \mathbb{N}$, y satisface

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) \approx 1.56.$$

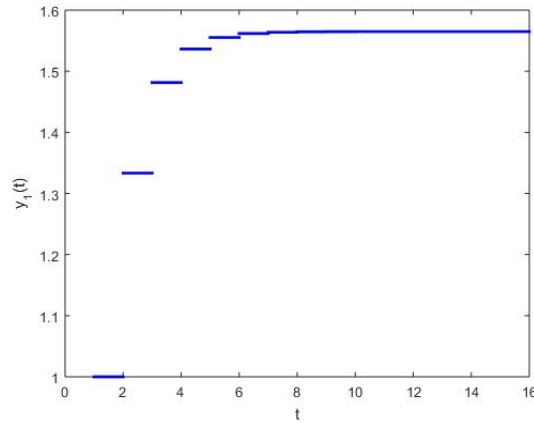


FIGURE 1. Solución impulsiva de (4.5)

Ejemplo 3. Sea la ecuación diferencial impulsiva

$$\begin{aligned}
 x'(t) &= \frac{x(t)}{t^2} + \sin\left(\frac{x(t)}{\sqrt{2}t^2}\right), & t \neq k \\
 \Delta x(t_k) &= (-1)^k \tanh\left(\frac{x(t_k^-)}{k^2}\right) + \frac{\cos(t_k)}{k^2}, & t = k, \quad k \in \mathbb{N} \\
 x(1) &= 0,5.
 \end{aligned}
 \tag{4.6}$$

De igual manera que el ejemplo anterior, es fácil ver que se satisfacen todas las hipótesis requeridas, ya que $f(t) = \frac{1}{t^2} \in \mathcal{L}^1([1, \infty[)$, $g(x) = (-1)^k \tanh\left(\frac{x((t_k)^-)}{k^2}\right) + \frac{\cos(t_k)}{t^2}$ y $h(x) = \sin\left(\frac{x(t)}{\sqrt{2}t^2}\right)$ son funciones tipo Lipschitz con factores de Lipschitz $\frac{1}{t^2}$ y $\frac{1}{\sqrt{2}t^2}$ respectivamente, ambos integrables. Así, la ecuación (4.6) posee un equilibrio asintótico.

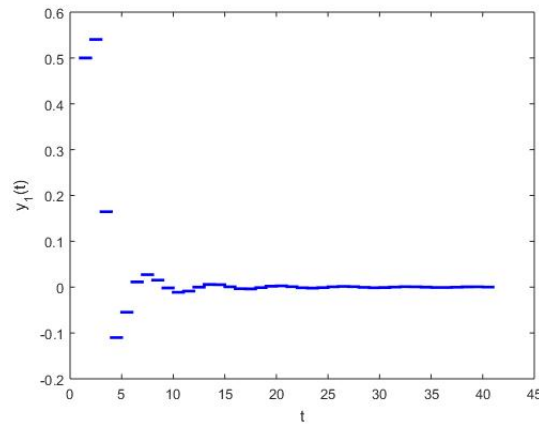


FIGURE 2. Solución impulsiva de (4.6) para $t \in [0, 50]$

5. Oscilaciones en ecuaciones diferenciales impulsivas de primer orden

No es difícil notar que el sistema

$$x'(t) + a(t)x(t) = 0$$

no tiene soluciones oscilatorias. Sin embargo, como veremos más adelante, el impulso "hace de las suyas".

Primero, comenzaremos con las definiciones clásicas de oscilación:

Definición 3. Una función $x(t)$ definida en el intervalo $[\tau, \infty)$ se dice **oscilatoria** si existen dos sucesiones reales $(a_n), (b_n) \subset [\tau, \infty)$ tales que $a_n \rightarrow \infty, b_n \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$ y

$$x(a_n) \leq 0 \leq x(b_n), \quad \forall n \geq M,$$

donde M es suficientemente grande. Es decir, **si no es eventualmente positiva ni eventualmente negativa**. En caso contrario, se dice que es **no oscilatoria**.

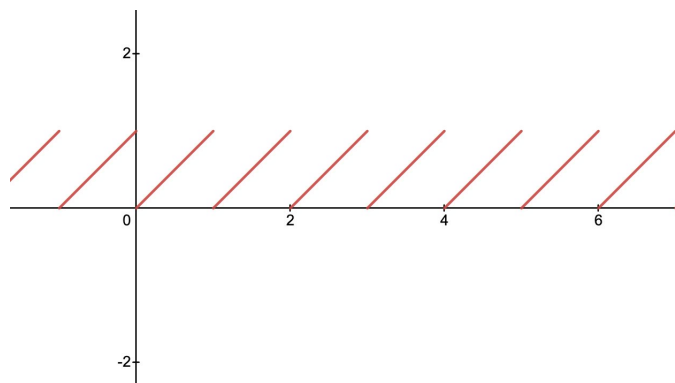


FIGURE 3. $f(t) = t - [t]$: an example of an oscillatory piecewise continuous function with infinite zeros ($f(n) = 0, \forall n \in \mathbb{Z}$).

En el contexto de funciones continuas a trozos, una función $x(t)$ puede ser oscilatoria incluso si $x(t) \neq 0, \forall t \in [\tau, \infty)$. *Este es nuestro marco de trabajo impulsivo*, por lo que todas las definiciones de oscilación válidas en el caso continuo dejan de ser aplicables al caso impulsivo. (véase [19]).

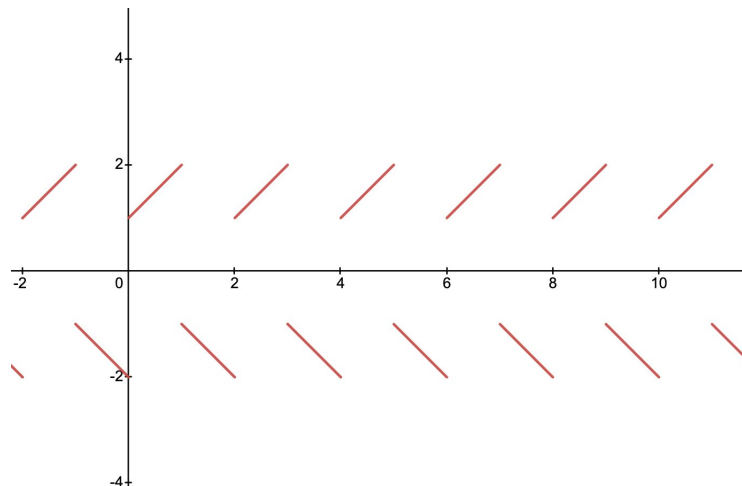


FIGURE 4. $f(t) = (-1)^{[t]}(t + 1 - [t])$. An oscillatory piecewise continuous function with $f(t) \neq 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Definición 4. Una solución no nula $y(n)$ de una ecuación en diferencias se denominará oscilatoria si, para todo entero positivo $M > 0$, existe $n \geq M$ tal que

$$y(n)y(n+1) \leq 0.$$

En caso contrario, $y(n)$ se denominará no oscilatoria (véase [14]).

5.1. Oscilaciones para el caso lineal impulsivo. Los siguientes resultados son básicos en la teoría de oscilaciones para ecuaciones diferenciales impulsivas y pueden encontrarse en [1].

Sean

$$(5.1) \quad \begin{aligned} x'(t) + a(t)x(t) &= 0, & t \neq t_k, \\ x(t_k) - x(t_k^-) &= a_k x(t_k^-), & t = t_k \end{aligned}$$

Teorema 7. Si $(1 + a_k)$ tiene infinitos términos negativos, entonces toda solución no nula de (5.1) es oscilatoria.

Demostración. Como la solución de (5.1) es

$$(5.2) \quad x(t) = x_0 \exp\left(\int_{t_0}^t -a(s)ds\right) \left(\prod_{j=1}^{k(t)} (1 + a_j)\right)$$

es inmediato que la solución alterna de signo si para el producto existen infinitos términos de la sucesión $(1 + a_j)$ negativos. Si este no fuera el caso, existe $K \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, tal que la solución es eventualmente positiva o negativa para todo $t \geq K$. ■

Ejemplo 4. Sea

$$(5.3) \quad \begin{aligned} x'(t) &= \sin(t)x(t), & t \neq k, k \in \mathbb{N} \\ x(k) &= (-1)^k x(k^-), & t = k. \end{aligned}$$

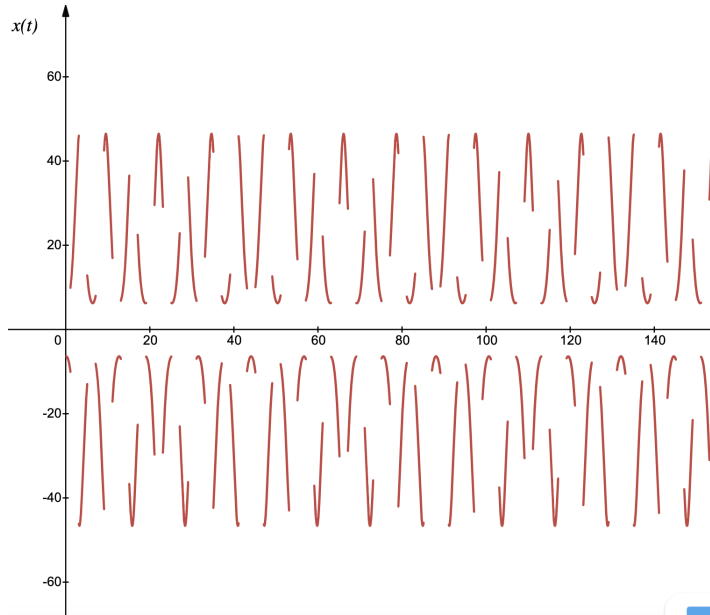


FIGURE 5. Solución de (5.3), con $x_0 = -6.3$.

6. Teoría de Floquet impulsiva

Sea el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$(6.1) \quad x'(t) = A(t)x(t), \quad A(t + \omega) = A(t), \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

donde $A(t)$ es una matriz continua. ¿Qué se puede decir sobre la estabilidad de las soluciones?

El siguiente ejemplo demuestra que los valores propios no son suficientes para asegurar la estabilidad de las soluciones:

Ejemplo 5. (*Contraejemplo de Markus-Yamabe*) [21]
Considérese el sistema

$$(6.2) \quad x' = A(t)x, \quad A(t + \pi) = A(t),$$

donde

$$A(t) = \begin{pmatrix} -1 + \frac{3}{2} \cos^2(t) & 1 - \frac{3}{2} \sin(t) \cos(t) \\ -1 - \frac{3}{2} \sin(t) \cos(t) & -1 + \frac{3}{2} \sin^2(t) \end{pmatrix}.$$

La matriz $A(t)$ tiene valores propios constantes e iguales a $\frac{1}{4}(-1 \pm \sqrt{7}i)$. A primera vista, podríamos concluir que la solución nula de la ecuación (6.2) es asintóticamente estable debido a la parte real negativa de los valores propios. Sin embargo, una solución de esta misma ecuación está dada por:

$$x(t) = \exp(t/2) \begin{pmatrix} -\cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix},$$

la cual no está acotada. Por lo tanto, la solución nula de (6.2) es inestable.

En consecuencia, surge una pregunta natural:

¿Qué se puede decir sobre la estabilidad de un sistema lineal no autónomo a partir de sus valores propios?

En un intento por estudiar la estabilidad de (6.1) utilizando la teoría espectral clásica de sistemas autónomos, el matemático francés *G. Floquet* demostró en 1883 su famoso y útil resultado que proporciona una forma canónica para la matriz fundamental de (6.1):

Teorema 8. (Teorema de Floquet) (G. Floquet) [16] *Sea el sistema lineal homogéneo periódico de periodo ω dado por (6.1), donde $A(t)$ es una matriz continua. Entonces, la matriz fundamental del sistema (6.1) puede factorizarse en la forma de Floquet como:*

$$X(t) = Q(t) \exp(\Lambda t),$$

donde $Q(t)$ es una matriz continuamente diferenciable y periódica de periodo ω , para todo $t \in \mathbb{R}$, y Λ es una matriz constante.

El Teorema de Floquet puede utilizarse para demostrar el siguiente resultado establecido por A.M. Lyapunov en su tesis doctoral (1892):

Teorema 9. (Teorema de Reducibilidad de Lyapunov) (A.M. Lyapunov) [20] *Sea el sistema (6.1), donde $A(t)$ es una matriz continua. Entonces, el sistema (6.1) puede reducirse a un sistema con coeficientes constantes mediante un cambio de variables lineal, no singular, continuo y periódico de periodo ω de la forma de Floquet-Lyapunov: $X = Q(t)Y$, transformando (6.1) en el sistema de coeficientes constantes $Y'(t) = PY(t)$.*

Los sistemas $X'(t) = A(t)X(t)$ y $Y'(t) = PY(t)$ son *cinemáticamente similares*. Es decir, existe una función de Lyapunov $Q(t)$ que satisface $Q'(t) = A(t)Q(t) - Q(t)P$. En este caso, $Q(t)$ es invertible, diferenciable y acotada (véase [13]).

El lector interesado en ecuaciones diferenciales impulsivas periódicas puede consultar [4] y [6, 11, 15] para profundizar en la teoría de Floquet aplicada a ecuaciones diferenciales ordinarias.

6.1. **Por qué sospechar de un Teorema de Floquet para IDE?**. Consideremos

$$(6.3) \quad \begin{aligned} x'(t) &= \operatorname{sen}(t)x(t), & t \neq k\pi, \\ x(k\pi) &= 2x(k\pi^-), & t = k\pi, \quad k \in \mathbb{N}_0 \\ x(t_0) &= x_0. \end{aligned}$$

donde podemos ver que este sistema es del tipo 2π -periódico.

Resolvamos (6.3). Si $t \in [k\pi, (k+1)\pi)$ para algún $k \in \mathbb{N}_0$, Integrando sobre $[k\pi, (k+1)\pi)$ se obtiene

$$x(t) = x(k\pi)e^{\int_{k\pi}^t \operatorname{sen}(s)ds}.$$

Es decir,

$$(6.4) \quad x(t) = x(k\pi)e^{-\cos(t)}e^{(-1)^k}.$$

Luego, asumiendo continuidad por la izquierda en $t = (k+1)\pi$ y considerando la condición impulsiva, se obtiene $x((k+1)\pi) = 2x(k\pi)e^{(-1)^k}$. Esta es una *ecuación en diferencias finitas* cuya solución es

$$(6.5) \quad x(k\pi) = \begin{cases} 2^k x_0, & \text{si } k \text{ es par,} \\ 2^k e x_0, & \text{si } k \text{ es impar.} \end{cases}$$

Finalmente, aplicando (6.5) en (6.4) se tiene la solución de (6.3)

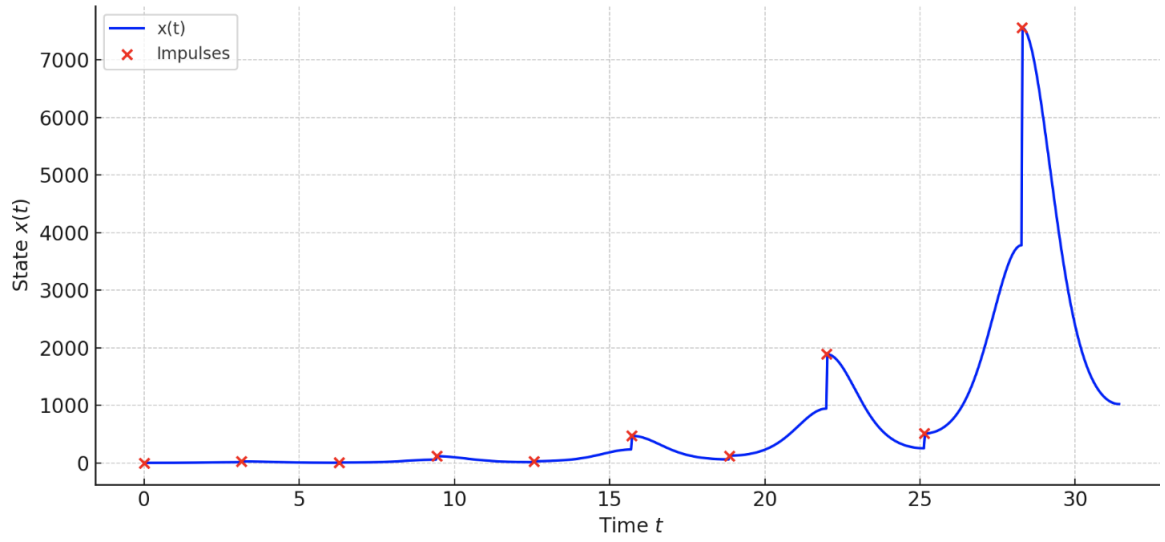
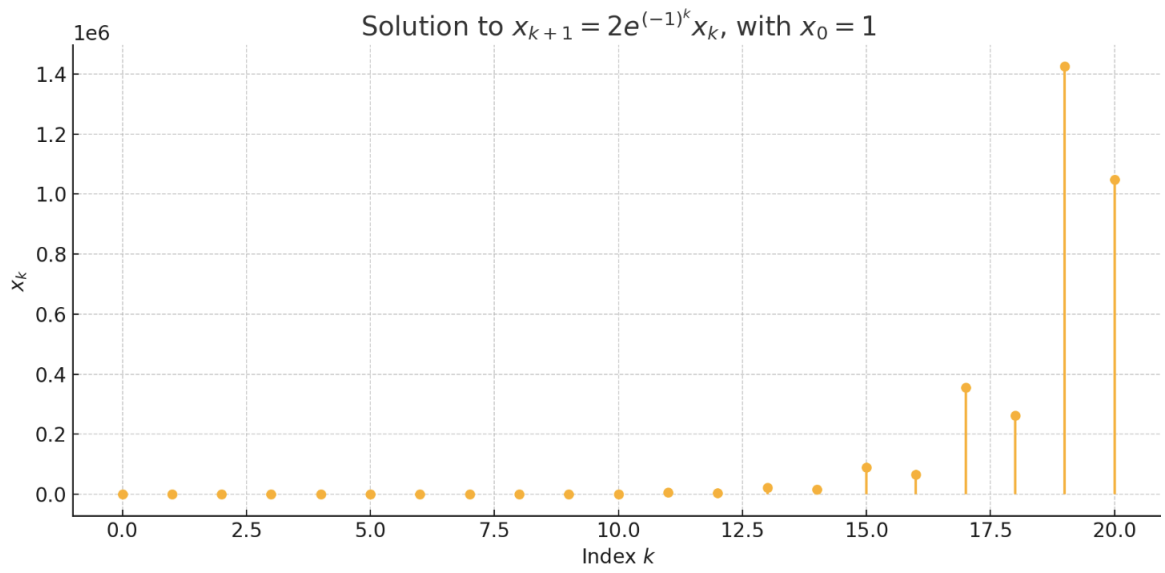
$$(6.6) \quad x(t) = \begin{cases} 2^k x_0 e^{-\cos(t)}, & \text{si } k \text{ es par,} \\ 2^k x_0 e^{1-\cos(t)}, & \text{si } k \text{ es impar.} \end{cases}$$

Podemos observar la naturaleza de la dinámica híbrida. Es decir, la dinámica depende tanto de la parte discreta como de la continua. La función $Q(t) = e^{1-\cos(t)}$ es 2π -periódica y, de (6.6), podemos observar que la descomposición

$$x(t) = \exp\left(\operatorname{Log}(2) \left\lceil \frac{t}{\pi} \right\rceil\right) \cdot \exp(\cos(t))x_0,$$

sugiere la forma normal de Floquet.

Remark 2. *Para bases negativas, ocuparemos $\operatorname{Log}(z)$, $z \in \mathbb{C} - \{0\}$, donde $\operatorname{Log}(z)$ es el logaritmo principal complejo.*

FIGURE 6. Solución de (6.3) , con $x_0 = 1$.FIGURE 7. Solución discreta de (6.3) , con $x_0 = 1$.

6.2. Construcción de la teoría de Floquet-Lyapunov. Sea $z(t) = \Phi(t, \tau)z(\tau)$ la solución de la ecuación diferencial ordinaria

$$z'(t) = A(t)z(t), \quad z_0 = z(\tau), \quad t, \tau \in [\tau, \infty),$$

donde $\Phi(t, s) = \Phi(t)\Phi^{-1}(s)$, $\Phi(t, u)\Phi(u, s) = \Phi(t, s)$.

Para simplificar, consideraremos la matriz fundamental normalizada $\Phi(0) = I$.

Todos los resultados pueden reescribirse considerando un valor arbitrario de $\Phi(0)$.

Remark 3. Además, por conveniencia de escritura y espacio, denotaremos el producto matricial derecho de A y B^{-1} como $A \cdot B^{-1} = \frac{A}{B}$.

Sea el sistema lineal IDE homogéneo ω -periódico

$$(6.7) \quad \begin{aligned} X'(t) &= A(t)X(t), & t \neq t_k \\ \Delta X|_{t=t_k} &= C_k X(t_k^-), & t = t_k \end{aligned}$$

donde $A(t)$ es una matriz $n \times n$ continua a trozos con valores reales, localmente integrable (con discontinuidades de salto en $t = t_k$), y existe un número natural p tal que $\det(I + C_k) \neq 0, \forall k = 1, 2, \dots, p$ y

$$(6.8) \quad \begin{aligned} A(t + \omega) &= A(t), & \forall t \in [0, \infty), \\ C_{k+p} &= C_k, & \forall k \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

$t_0 = \tau < t_1 < \dots < t_p \leq \tau + \omega$, donde la sucesión de instantes de impulso cumple la llamada propiedad (ω, p)

$$(6.9) \quad t_{k+p} = t_k + \omega, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Esta sección proporciona una versión del Teorema de Floquet para sistemas IDE.

6.3. Resultados auxiliares. En lo que sigue, supondremos el Teorema clásico de Floquet para las soluciones del sistema ordinario ω -periódico

$$(6.10) \quad \begin{aligned} Z'(t) &= A(t)Z(t), \\ A(t + \omega) &= A(t), \end{aligned}$$

con $\Phi(\tau) = I$, es decir, $\Phi(t + \omega) = \Phi(t)\Phi(\omega), \forall t \in \mathbb{R}$.

Lema 2. Sean las matrices $\Phi(t, s)$. Entonces, se cumple la siguiente propiedad:

$$(6.11) \quad \Phi(t + \omega, s + \omega) = \Phi(t, s), \quad \forall t, s \in \mathbb{R}.$$

Demostración. Por el Teorema clásico de Floquet aplicado a (6.10), se tiene que $\Phi(t + \omega) = \Phi(t)\Phi(\omega)$. Entonces:

$$\begin{aligned} \Phi(t + \omega, s + \omega) &= \Phi(t + \omega)\Phi^{-1}(s + \omega) \\ &= \Phi(t)\Phi(\omega)\Phi^{-1}(\omega)\Phi^{-1}(s) \\ &= \Phi(t)\Phi^{-1}(s) \\ &= \Phi(t, s). \end{aligned}$$

■

Como corolario, usando la fórmula de la matriz fundamental para un sistema lineal impulsivo homogéneo, no es difícil demostrar el siguiente resultado:

Corolario 2. Sea válido el Lema 2. Entonces, la matriz de transición (o matriz de Cauchy) asociada a (6.7) satisface $\Psi(t + \omega, s + \omega) = \Psi(t, s), \forall t, s \in \mathbb{R}$.

6.4. **El operador de monodromía.** Algunos de los siguientes resultados son básicos; sin embargo, los presentaremos por claridad y completitud. Pueden encontrarse en [4]:

Lema 3. Si $X(t)$ es una solución fundamental de (6.7), entonces $X(t + \omega)$ también lo es.

Demostración. Sea $Y(t) = X(t + \omega)$. Entonces, para $t \neq t_k$, se tiene

$$\begin{aligned} Y'(t) &= A(t + \omega)Y(t) \\ &= A(t)Y(t). \end{aligned}$$

Finalmente, para $t = t_k$ y $Y(t_k) = X(t_k + \omega) = X(t_{k+p})$, se tiene:

$$\Delta Y(t_k) = \Delta X(t_{k+p}) = C_{k+p}X(t_{k+p}^-) = C_k Y(t_k).$$

■

Recordemos que la matriz fundamental del sistema lineal homogéneo está dada por:

$$(6.12) \quad \Psi(t) = \Phi(t, t_{k(t)}) \left(\prod_{k=1}^{k(t)} (I + C_j) \Phi(t_k, t_{k-1}) \right).$$

Definimos

$$(6.13) \quad \Psi(\omega) = \prod_{k=1}^p (I + C_j) \Phi(t_k, t_{k-1})$$

como el **operador de monodromía** o **matriz de monodromía** de (6.7). Note que hemos mostrado que $\Psi(\tau + \omega) = \Psi(\tau)\Psi(\omega)$, donde $\Psi(\tau) = I$.

Sin pérdida de generalidad, en el resto del trabajo consideraremos $t_0 = \tau = 0$.

Teorema 10. (Teorema de factorización de Floquet)

Sea válido el Lema 2. Entonces, la solución fundamental $X(t)$ de (6.7) con $X(0) = I$ puede escribirse en la forma normal de Floquet como:

$$(6.14) \quad X(t + \omega) = X(t)X(\omega).$$

Demostración. Calcularemos directamente $X(t + \omega)$. Evaluando a la matriz fundamental del sistema lineal homogéneo $\Psi(t)$ en $t + \omega$, se obtiene

$$\begin{aligned} \Psi(t + \omega) &= \Phi(t + \omega, t_{k(t)+p}) \left(\prod_{k=1}^{k(t)+p} (I + C_j) \Phi(t_k, t_{k-1}) \right) \\ &= \Phi(t, t_{k(t)}) \left(\prod_{k=1}^{k(t)} (I + C_j) \Phi(t_k, t_{k-1}) \right) \left(\prod_{k=1}^p (I + C_j) \Phi(t_k, t_{k-1}) \right) \\ &= \Psi(t)\Psi(\omega). \end{aligned}$$

■

Como consecuencia del último teorema, tenemos una condición necesaria y suficiente para la existencia de una solución ω -periódica de (6.7):

Corolario 3. (Criterio de existencia de soluciones periódicas para el IDE (6.7))

Sea $X(t)$ la solución fundamental de (6.7) con $X(0) = I$ y sea válido el Lema 2. Entonces, (6.7) tiene una solución ω -periódica si y solo si $X(\omega) = I$, es decir,

$$(6.15) \quad \prod_{k=1}^p (I + C_j) \Phi(t_k, t_{k-1}) = I.$$

Demostración. Sea válido el Teorema 10.

(\Leftarrow) Si $X(\omega) = I$, entonces:

$$X(t + \omega) = X(t)X(\omega) = X(t).$$

(\Rightarrow) Si $X(t + \omega) = X(t)$, al evaluar en $t = 0$, se obtiene $X(\omega) = X(0) = I$. ■

Corolario 4. Sea $N \in \mathbb{N}$. Sea $X(t)$ la solución fundamental de (6.7) con $X(0) = I$ y sea válido el Lema 2. Entonces, (6.7) tiene una solución $N\omega$ -periódica si y solo si $X^N(\omega) = I$, donde I es la matriz identidad, es decir:

$$\left(\prod_{k=1}^p (I + C_j) \Phi(t_k, t_{k-1}) \right)^N = I.$$

Remark 4. (1) Debido a (6.11), la matriz fundamental de un sistema IDE homogéneo lineal ω -periódico ya posee la forma de factorización de Floquet dada por (6.14). Este es un hecho notable y esperado.

(2) El Corolario 3 extiende la condición dada por K-S. Chiu y M. Pinto en [10] para la existencia de soluciones ω -periódicas del caso DEPCAG lineal homogéneo. Los autores consideraron $t_p = \omega$ y $C_j = 0$, $\forall j \in \mathbb{Z}$.

6.5. El logaritmo del operador de monodromía. Como se indicó anteriormente, consideraremos $\text{Log}(z)$ como el logaritmo complejo principal, con

$$\text{Log}(z) = \ln(|z|) + i \arg(z), \quad -\pi < \arg(z) \leq \pi \text{ y } z \neq 0.$$

En esta sección, daremos algunas condiciones para la existencia del logaritmo de una matriz.

6.6. Multiplicadores y exponentes de Floquet, exponentes de Lyapunov.

6.6.1. Multiplicadores de Floquet.

Definición 5. Los valores propios $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ (contando multiplicidades) de la matriz de monodromía $X(\omega)$ son los llamados **multiplicadores de Floquet de $X(\omega)$** .

Sabemos que los multiplicadores de Floquet son distintos de cero, ya que $X(t + \omega)$ y $X(t)$ son matrices fundamentales de (6.7) y, por lo tanto, no singulares. De hecho,

$$(6.16) \quad \det(X(\omega)) = \frac{\det(X(t + \omega))}{\det(X(t))} = \prod_{i=1}^n \rho_i \neq 0.$$

Como $\rho_j \neq 0$, $\forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$, podemos escribir los multiplicadores de Floquet como

$$\rho_j = \exp(\lambda_j), \quad \lambda_j \in \mathbb{C}.$$

Un hecho sorprendente es que la dinámica del sistema ω -periódico (6.7) está gobernada por las propiedades espectrales de $X(\omega)$. Los multiplicadores de Floquet jugarán un papel crucial en este propósito:

Teorema 11. Sea válido el Teorema 10 y consideremos la matriz de monodromía $X(\omega)$ del sistema ω -periódico (6.7). Entonces, un multiplicador de Floquet $\rho_j = \exp(\lambda_j)$ con $\lambda_j \in \mathbb{C}$ es un valor propio de $X(\omega)$ si y sólo si existe una solución no trivial $x_j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$x_j(t + \omega) = \rho_j x_j(t), \quad j \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Demostración. Sea $v_j \in \mathbb{C}^n - \{0\}$ un vector propio de $X(\omega)$ asociado al valor propio $\rho_j = \exp(\lambda_j)$, y definamos

$$x_j(t) := X(t)v_j,$$

donde $X(t)$ es la matriz fundamental de (6.7) con $X(0) = I$. Entonces, $x_j(t)$ es una solución de (6.7) y

$$\begin{aligned} x_j(t + \omega) &= X(t + \omega)v_j \\ &= X(t)X(\omega)v_j \\ &= \rho_j X(t)v_j \\ &= \rho_j x_j(t). \end{aligned}$$

Recíprocamente, si $x_j(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ es una solución no trivial que satisface $x_j(t + \omega) = \rho_j x_j(t)$, podemos considerar $x_j(0) \neq 0$. Entonces, observamos que

$$x_j(\omega) = X(\omega)x_j(0) = \rho_j x_j(0).$$

Es decir, $x_j(0)$ es un vector propio de $X(\omega)$ con valor propio asociado ρ_j . ■

Es importante remarcar que si $Y(t)$ es otra matriz fundamental cualquiera para (6.7), entonces

$$X(t) = Y(t)G,$$

para alguna matriz no singular G . Así, podemos ver que:

$$\begin{aligned} Y(t + \omega)G &= X(t + \omega) \\ &= X(t)X(\omega) \\ &= Y(t)GX(\omega). \end{aligned}$$

Es decir,

$$Y(t + \omega) = Y(t)GX(\omega)G^{-1}.$$

Por lo tanto, según la última ecuación, toda matriz fundamental $Y(t)$ determina una matriz $GX(\omega)G^{-1}$. Como el espectro de $X(\omega)$ es invariante por semejanza, todas las matrices fundamentales tienen los mismos multiplicadores de Floquet.

Como corolario del Teorema 11, tenemos el siguiente resultado respecto al comportamiento asintótico de las soluciones de (6.7):

Corolario 5. (*Comportamiento asintótico de las soluciones de un sistema lineal IDE ω -periódico por medio de los multiplicadores de Floquet*)

Las soluciones de (6.7) convergen exponencialmente a cero si $|\rho_j| < 1$, serán ω -periódicas (o 2ω -periódicas) si $|\rho_j| = 1$, y serán no acotadas si $|\rho_j| > 1$. En otras palabras, si los multiplicadores de Floquet están dentro del círculo unidad, las soluciones de (6.7) serán acotadas. En caso contrario, serán no acotadas.

6.6.2. Exponentes de Floquet.

Definición 6. Sea $\rho_j = \exp(\lambda_j)$, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ un multiplicador de Floquet de $X(\omega)$. Llamaremos al número $\frac{1}{\omega} \text{Log}(\rho_j)$ el *j -ésimo exponente de Floquet* de $X(\omega)$.

Definición 7. Las partes reales de los exponentes de Floquet se denominan *exponentes de Lyapunov* y se denotarán como

$$\frac{1}{\omega} \text{Log}(|\rho_j|) = \Re(\lambda_j), \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Como consecuencia de la definición anterior, tenemos el siguiente resultado:

Corolario 6. (*Comportamiento asintótico de las soluciones de un sistema lineal IDE ω -periódico mediante los exponentes de Floquet*)

Las soluciones del sistema (6.7) :

- *Convergen exponencialmente a cero si $\Re(\lambda_j) < 0$.*
- *Serán ω -periódicas si $\Re(\lambda_j) = \Im(\lambda_j) = 0$.*
- *Serán 2ω -periódicas si $\Re(\lambda_j) = 0$ y $\Im(\lambda_j) \neq 0$.*
- *Serán no acotadas si $\Re(\lambda_j) > 0$.*

En otras palabras, si los exponentes de Lyapunov son menores o iguales que 0, las soluciones del sistema (6.7) serán acotadas. En caso contrario, serán no acotadas.

Como $X(\omega)$ es no singular, entonces posee un logaritmo. La existencia del logaritmo de una matriz es un hecho clave para establecer nuestra versión del Teorema de Floquet:

Teorema 12. (*Existencia del logaritmo de una matriz*) (Teorema 2.47) [6]

1. *Si A es una matriz compleja no singular de tamaño $n \times n$, entonces existe una matriz C (posiblemente compleja) de tamaño $n \times n$ tal que*

$$\exp(C) = A \Leftrightarrow C = \text{Log}(A).$$

2. Si A es una matriz real no singular de tamaño $n \times n$, entonces existe una matriz real C de tamaño $n \times n$ tal que

$$\exp(C) = A^2 \Leftrightarrow C = \text{Log}(A^2).$$

De hecho, los valores propios reales de A generarán valores propios positivos de A^2 .

Remark 5. Dado que es difícil de encontrar en la literatura, mostraremos la importancia de la condición (2) del teorema anterior. Consideremos el sistema ordinario homogéneo ω -periódico (6.1). Observamos que si todos los valores propios ρ_j de la matriz de monodromía son reales, entonces por el Teorema clásico de Floquet 8, podemos escribir una solución compleja de (6.1) como

$$x_j(t) = \exp(p_j t) q(t), \quad q_j(t) = x_j(t) \exp(-p_j t), \quad q_j(t + \omega) = q_j(t),$$

donde $p_j = \frac{1}{\omega} \text{Log}(|\lambda_j|)$ es el operador de monodromía y $\rho_j = \exp(\lambda_j)$ corresponde al multiplicador de Floquet (el cual es un valor propio de la matriz de monodromía de (6.1)), es decir,

$$x_j(t + \omega) = \rho_j x_j(t).$$

Así, tenemos que:

$$\begin{aligned} q_j(t + \omega) &= x_j(t + \omega) \exp\left(-\frac{1}{\omega} \text{Log}(|\lambda_j|)(t + \omega)\right) \\ &= x_j(t) \rho_j \exp\left(-\frac{1}{\omega} \text{Log}(|\lambda_j|)(t + \omega)\right) \\ &= x_j(t) \exp(\text{Log}(\lambda_j) - \text{Log}(|\lambda_j|)) \exp\left(-\frac{t}{\omega} \text{Log}(|\lambda_j|)\right) \\ &= \text{sign}(\lambda_j) x_j(t) \exp(-p_j t) \\ &= \text{sign}(\lambda_j) q_j(t). \end{aligned}$$

Ahora bien, si queremos una solución periódica real de (6.1), observamos que si $\lambda_j \in \mathbb{R}$ es un valor propio real de A , entonces podemos considerar $\Lambda_j = \lambda_j^2$ (es decir, un valor propio de A^2) de modo que $\Lambda_j > 0$. De esta manera, $q_j(t)$ será una función 2ω -periódica. Es decir, si consideramos

$$\tilde{p}_j = \frac{1}{2\omega} \text{Log}(\Lambda_j),$$

entonces

$$\begin{aligned} \tilde{q}_j(t + 2\omega) &= x_j(t + 2\omega) \exp\left(-\frac{1}{2\omega} \text{Log}(\Lambda_j)(t + 2\omega)\right) \\ &= x_j(t) \rho_j^2 \exp\left(-\frac{1}{2\omega} \text{Log}(\Lambda_j)(t + 2\omega)\right) \\ &= x_j(t) \exp(\text{Log}(\Lambda_j) - \text{Log}(\Lambda_j)) \exp\left(-\frac{t}{2\omega} \text{Log}(\Lambda_j)\right) \\ &= x_j(t) \exp(-\tilde{p}_j t) \\ &= \tilde{q}_j(t). \end{aligned}$$

A partir de (6.16), obtenemos el siguiente resultado importante:

Corolario 7. (**L**) Sea $X(\omega)$ como en (6.13). Como $\det(X(\omega)) \neq 0$, entonces $\text{Log}(X(\omega))$ existe.

Podemos definir ahora nuestro operador P :

$$(6.17) \quad P = \frac{1}{\omega} \text{Log}(X(\omega)).$$

6.7. El teorema de Floquet. Enunciamos y demostramos la versión IDE del teorema de Floquet:

Teorema 13. (Teorema de Floquet para IDE)

Sea el sistema lineal homogéneo de ecuaciones diferenciales impulsivas ω -periódico (6.7):

$$\begin{aligned} x'(t) &= A(t)x(t), & t \neq t_k, \\ \Delta x|_{t=t_k} &= C_k x(t_k^-), & t = t_k, \end{aligned}$$

yl sean las condiciones (6.8), (6.9), Teorema 10 y (L) las que se cumplan. Entonces,

(i) La solución $X(t)$ de (6.7) puede ser representada en la **forma normal de Floquet** como

$$(6.18) \quad X(t) = Q(t) \exp(Pt), \quad P = \frac{1}{\omega} \text{Log}(X(\omega)), \quad t \in \mathbb{R},$$

donde $P \in \mathbb{C}^{n \times n}$ es constante y la función matriz $Q(t) \in \mathcal{PC}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{n \times n})$ es no singular, ω -periódica y satisface la IDE

$$(6.19) \quad \begin{aligned} Q'(t) &= A(t)Q(t) - Q(t)P, & t \neq t_k, \\ Q(t_k) &= (I + C_k)Q(t_k^-), & t = t_k. \end{aligned}$$

Además, si $A(t)$ y C_k son matrices reales, cada solución fundamental $X(t)$ de (6.7) puede ser representada en la forma normal de Floquet como

$$(6.20) \quad X(t) = \tilde{Q}(t) \exp(\tilde{P}t), \quad \tilde{P} = \frac{1}{2\omega} \text{Log}(X^2(\omega)), \quad t \in \mathbb{R},$$

donde $\tilde{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es constante y $\tilde{Q}(t) \in \mathcal{PC}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n \times n})$ es una función matriz no singular de período 2ω .

(ii) La ecuación (6.7) es reducible a la ecuación diferencial ordinaria:

$$(6.21) \quad Y'(t) = PY(t),$$

por una transformación de Floquet-Lyapunov ω -periódica $X(t) = Q(t)Y(t)$. Es decir, las ecuaciones (6.7) y (6.21) son IDE-cinématicamente similares mediante el uso de la función de Lyapunov $Q(t)$, verificando la EDO

$$Q'(t) = A(t)Q(t) - Q(t)P.$$

Demostración.

(i) Dado que $\det(X(\omega)) \neq 0$, por el Teorema 12 $X(\omega)$ tiene un logaritmo. Entonces, podemos reescribir $X(t + \omega) = X(t)X(\omega)$ como $X(t + \omega) = X(t) \exp(P\omega)$, con

$$P = \frac{1}{\omega} \text{Log}(X(\omega)).$$

Ahora, definimos

$$(6.22) \quad Q(t) = X(t) \exp(-Pt).$$

Probaremos que la solución de (6.7) puede escribirse como (6.22).

Primero, asumiendo (6.22), probaremos que $Q(t + \omega) = Q(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Sea $X(\omega) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ matriz, por el Teorema 12, tenemos

$$\begin{aligned} Q(t + \omega) &= X(t + \omega) \exp(-P(t + \omega)) \\ &= X(t)X(\omega)X^{-1}(\omega) \exp(-Pt) \\ &= X(t) \exp(-Pt) \\ &= Q(t). \end{aligned}$$

A continuación, si $X(\omega) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, por el Teorema 12 definimos

$$\tilde{P} = \frac{1}{2\omega} \text{Log}(X(\omega)).$$

Además, vemos que $X(t + 2\omega) = X(t)X^2(\omega)$. Entonces,

$$\begin{aligned}\tilde{Q}(t + 2\omega) &= X(t + 2\omega) \exp(-\tilde{P}(t + 2\omega)) \\ &= X(t)X^2(\omega)(X^{-1}(\omega))^2 \exp(-\tilde{P}t) \\ &= X(t) \exp(-\tilde{P}t) \\ &= \tilde{Q}(t).\end{aligned}$$

Como $X(t)$, $\exp(-Pt)$ y $\exp(-\tilde{P}t)$ son no singulares y diferenciables para todo $t \in \mathbb{R}$, (posiblemente con las excepciones en $t = t_k$, cuando existe la derivada por la izquierda) tenemos que $Q(t)$ y $\tilde{Q}(t)$ también son no singulares y diferenciables.

Ahora, si buscamos una solución del tipo $X(t) = Q(t) \exp(Pt)$ con $Q(t + \omega) = Q(t)$ y $Q(0) = I$, como veremos debe satisfacer (6.19).

De hecho, como $X(t)$ es la solución de (6.7), diferenciando la última expresión es fácil ver que

$$\begin{aligned}Q'(t)e^{Pt} + Q(t)Pe^{Pt} &= A(t)Q(t)e^{Pt}, & t \neq t_k, \\ \Delta Q(t_k)e^{P(t_k)} &= C_k Q(t_k^-)e^{P(t_k)}, & t = t_k.\end{aligned}$$

Multiplicando por la derecha por $\exp(-Pt)$, obtenemos (6.19).

A continuación, siguiendo las ideas de [13] (Ch.3), notamos que la matriz de Cauchy de la solución de la ecuación diferencial ordinaria $R'(t) = A(t)R(t) - R(t)P$ es $R(t, \tau) = \Phi(t, \tau)R(\tau) \exp(-P(t - \tau))$, donde $\Phi(t)$ y $\exp(-Pt)$ son las matrices fundamentales de $Z'(t) = A(t)Z(t)$ y $Y(t) = PY(t)$, respectivamente.

Para (6.19), tenemos

$$Q'(t) - A(t)Q(t) + Q(t)P = 0.$$

Multiplicando la última ecuación por la izquierda por $\Phi(s, t)$, obtenemos

$$\Phi(s, t)Q'(t) - \Phi(s, t)A(t)Q(t) + \Phi(s, t)Q(t)P = 0.$$

No es difícil ver que $\frac{\partial}{\partial t}\Phi(s, t) = -\Phi(s, t)A(t)$. Entonces, la última ecuación puede reescribirse como

$$(6.23) \quad \frac{\partial}{\partial t}(\Phi(s, t)Q(t)) + \Phi(s, t)Q(t)P = 0.$$

A continuación, notando que $\frac{d}{dt}(e^{Pt}) = Pe^{Pt}$ y multiplicando (6.23) por la derecha por $e^{P(t-s)}$, obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Phi(s, t)Q(t))e^{P(t-s)} + \Phi(s, t)Q(t)\frac{\partial}{\partial t}(e^{P(t-s)}) = 0.$$

Es decir,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Phi(s, t)Q(t)e^{P(t-s)}) = 0.$$

Ahora, integrando la última expresión desde s hasta t , obtenemos

$$\Phi(s, t)Q(t)e^{P(t-s)} = Q(s).$$

Finalmente, multiplicando por la izquierda por $\Phi(t, s)$ y por la derecha por $e^{-P(t-s)}$ la última ecuación, obtenemos

$$(6.24) \quad Q(t) = \Phi(t, s)Q(s)e^{P(t-s)}.$$

En lo siguiente, utilizaremos (6.24) reescrita como

$$(6.25) \quad Q(t)e^{Pt} = \Phi(t, \tau)Q(\tau)e^{P\tau}.$$

Usando el Teorema ?? y (6.25), resolveremos (6.19).

Ahora, evaluando la última ecuación en $\tau = t_n$, tenemos

$$(6.26) \quad Q(t)e^{Pt} = \Phi(t, t_n)Q(t_n)e^{Pt_n}.$$

Suponiendo la continuidad por la izquierda de la solución, consideramos $t \rightarrow t_{n+1}^-$, obteniendo

$$Q(t_{n+1}^-)e^{Pt_{n+1}} = \Phi(t_{n+1}, t_n)Q(t_n)e^{Pt_n}.$$

Por lo tanto, aplicando la condición impulsiva dada por (6.19), obtenemos la siguiente ecuación en diferencias

$$Q(t_{n+1})e^{Pt_{n+1}} = (I + C_{n+1})\Phi(t_{n+1}, t_n)Q(t_n)e^{Pt_n},$$

cuya solución es

$$(6.27) \quad Q(t_n)e^{Pt_n} = \left(\prod_{r=0}^n (I + C_r)\Phi(t_{r+1}, t_r) \right).$$

Finalmente, aplicando (6.27) en (6.28) obtenemos la solución de (6.19):

$$(6.28) \quad \begin{aligned} Q(t)e^{Pt} &= \Phi(t, t_{k(t)}) \left(\prod_{r=0}^{k(t)} (I + C_r)\Phi(t_{r+1}, t_r) \right) \\ &= \Psi(t). \end{aligned}$$

donde $k(t)$ es el único $k \in \mathbb{Z}$ tal que $t \in I_{k(t)} = [t_{k(t)}, t_{k(t)+1})$.

- (ii) Finalmente, mediante el cambio de variables de Floquet-Lyapunov $X(t) = Q(t)Y(t)$, diferenciando para $t \neq t_k$ obtenemos

$$\begin{aligned} Q'(t)Y(t) + Q(t)Y'(t) &= A(t)Q(t)Y(t) \\ &= \underbrace{\left(Q'(t) + Q(t)P \right)}_{A(t)Q(t) \text{ por (6.19)}} Y(t), \end{aligned}$$

con lo cual concluimos que $Y'(t) = PY(t)$. ■

Remark 6.

- Si $C_r :=$, recuperamos la versión clásica del Teorema de Floquet.

Corolario 8. (Solución acotada de (6.7) sobre \mathbb{R})

La única solución acotada de (6.7) sobre todo \mathbb{R} es la solución ω -periódica o la solución 2ω -periódica. Es decir, cuando el exponente de Lyapunov es 0, pero el exponente de Floquet es puramente imaginario o cuando el exponente de Floquet es idénticamente 0.

Remark 7. El problema de encontrar una forma normal de la solución de Floquet de (6.7) es equivalente a encontrar P y $Q(t)$ que satisfacen (6.19). En general, este problema parece ser muy difícil.

7. Soluciones periódicas

Agregar ejemplo del libro de bainov logistico
agregar lo del contador de impulsos y la solucion periodica de la tesis de magister.
Mencionar la tp propiedad

8. Solución periódica del sistema lineal no homogéneo (caso no-crítico)

8.1. **Solución periódica del sistema lineal no homogéneo.** En esta sección lo que se pretende demostrar es que el sistema

$$\begin{aligned} x' &= A(t)x + f(t) & t \neq t_k \\ x(t_k^+) &= (I + B_k)x(t_k^-) + h_k & t = t_k \quad t_k \in (t_k)_{i=-\infty}^{\infty} \end{aligned}$$

en donde $A(t)$ es una matriz continua (piecewise continua), T -periódicas y $f(t)$ un vector función T -periódico, B_k matriz constante, h vector constante y $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ sucesión tales que

$$B_{k+p} = B_k \quad h_{k+p} = h_k \quad t_{k+p} = t_k + T \quad \text{con algún } p \in \mathbb{N} \text{ e } k \in \mathbb{Z}$$

junto con $\det(I + B_k) \neq 0$ y $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_p < T$ tiene soluciones T -periódicas.

Como anteriormente vimos, cualquier solución $x(t, t_0, x_0)$ del sistema impulsivo lineal no homogéneo puede escribirse como

$$x(t, t_0, x_0) = \Psi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \Psi(t, s)f(s)ds + \sum_{t_k < t} \Psi(t, t_k)h_k$$

A fin de poder contestar a la pregunta antes planteada introduciremos el siguiente lema:

Lema 4. Sean los sistemas

$$(8.1) \quad \begin{aligned} x' &= A(t)x & t \neq t_k \\ x(t_k^+) &= (I + B_k)x(t_k^-) & t = t_k \end{aligned}$$

y

$$(8.2) \quad \begin{aligned} x' &= A(t)x + f(t) & t \neq t_k \\ x(t_k^+) &= (I + B_k)x(t_k^-) + h_k & t = t_k \end{aligned}$$

Suponiendo que los sistemas anteriores poseen los mismos instantes de impulso t_k , tenemos:

- a) Si φ_1 y φ_2 son soluciones del sistema lineal impulsivo no homogéneo, entonces $\varphi_1 - \varphi_2$ es solución del sistema lineal impulsivo homogéneo
- b) Si φ satisface (I) y γ satisface (II), entonces $\varphi + \gamma$ es solución del sistema lineal impulsivo no homogéneo (II)

Demostración. Debemos analizar dos caso : $t = t_k$ y $t \neq t_k$ Caso $t \neq t_k$ Es claro que $(\varphi_1 - \varphi_2)' = A(t)(\varphi_1 - \varphi_2)$ lo que dice que $\varphi_1 - \varphi_2$ es solución del sistema (I).

Caso $t = t_k$

Se tiene que

$$\varphi_1(t_k^+) = (I + B_k)\varphi_1(t_k^-) + h_k$$

y

$$\varphi_2(t_k^+) = (I + B_k)\varphi_2(t_k^-) + h_k$$

con $\varphi_1(t_k^-) = \lim_{t \rightarrow t_k^-} \varphi_1(t) = \varphi_1(t_k)$ y $\varphi_2(t_k^-) = \lim_{t \rightarrow t_k^-} \varphi_2(t) = \varphi_2(t_k)$, (ambos existen por ser φ_1 y φ_2 continuas por la izquierda), por lo que se tiene

$$\varphi_1(t_k^+) - \varphi_2(t_k^+) = (I + B_k)\varphi_1(t_k^-) - (I + B_k)\varphi_2(t_k^-) = (I + B_k)(\varphi_1(t_k^-) - \varphi_2(t_k^-))$$

lo que nos dice que

$$(\varphi_1 - \varphi_2)(t_k^+) = (I + B_k)(\varphi_1 - \varphi_2)(t_k^-)$$

por lo que se tiene lo pedido.

b)

Caso $t \neq t_k$

Es claro que $(\varphi + \gamma)' = A(t)\varphi + A(t)\gamma + f(t) = A(t)(\varphi + \gamma) + f(t)$ lo que dice $\varphi + \gamma$ es solución de (II).

Caso $t = t_k$

se tiene que

$$\varphi(t_k^+) = (I + B_k)\varphi(t_k^-)$$

y

$$\gamma(t_k^+) = (I + B_k)\gamma(t_k^-) + h_k$$

con $\varphi(t_k^-) = \lim_{t \rightarrow t_k^-} \varphi(t) = \varphi(t_k)$ y $\gamma(t_k^-) = \lim_{t \rightarrow t_k^-} \gamma(t) = \gamma(t_k)$, (ambos existen por ser γ y φ continuas por la izquierda), por lo que

$$\begin{aligned} \varphi(t_k^+) + \gamma(t_k^+) &= (I + B_k)\varphi(t_k^-) + (I + B_k)\gamma(t_k^-) + h_k \\ &= (I + B_k)(\varphi(t_k^-) + \gamma(t_k^-)) + h_k \end{aligned}$$

lo que nos dice que

$$(\varphi + \gamma)(t_k^+) = (I + B_k)(\varphi + \gamma)(t_k^-) + h_k$$

que es lo pedido. ■

Los resultados se basan en el siguiente teorema:

Teorema 14. *Sean los sistemas (I) y (II) los sistemas periódicos con las hipótesis de periodicidad mencionadas sobre cada una de sus componentes. Si el sistema lineal homogéneo (I) no tiene soluciones periódicas más que la trivial, entonces el sistema (II) posee una única solución T -periódica.*

Demostración. Unicidad: sean φ_1 y φ_2 soluciones periódicas del sistema (II). Por el lema se tendría que $\varphi_1 - \varphi_2$ es solución periódica del sistema (I). Por hipótesis, el sistema lineal homogéneo no posee soluciones periódicas más que la trivial lo que implica que $\varphi_1 = \varphi_2$.

Existencia:

Si existiese tal solución sería de la forma

$$x(t, t_0, x_0) = \Psi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \Psi(t, s)f(s)ds + \sum_{t_k < t} \Psi(t, t_k)h_k$$

luego, como la solución sería periódica se tiene $x(t_0 + T, t_0, x_0) = x(t_0, t_0, x_0) = x_0$, lo que implica que

$$x(t_0 + T, t_0, x_0) = \Psi(t_0 + T, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t_0+T} \Psi(t_0 + T, s)f(s)ds + \sum_{i=i}^p \Psi(t_0 + T, t_k)a_i$$

lo que permite concluir que

$$x_0 = \Psi(t_0 + T, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t_0+T} \Psi(t_0 + T, s)f(s)ds + \sum_{i=i}^p \Psi(t_0 + T, t_k)a_i$$

y, luego

$$x_0 = (I - \Psi(t_0 + T, t_0))^{-1} \left[\int_{t_0}^{t_0+T} \Psi(t_0 + T, s)f(s)ds + \sum_{i=i}^p \Psi(t_0 + T, t_k)a_i \right]$$

por lo que la solución sería de la forma

$$x(t, t_0, x_0) = \Psi(t, t_0)(I - \Psi(t_0 + T, t_0))^{-1} \left[\int_{t_0}^{t_0+T} \Psi(t_0 + T, s)f(s)ds + \sum_{i=i}^p \Psi(t_0 + T, t_k)a_i \right] \\ + \int_{t_0}^t \Psi(t, s)f(s)ds + \sum_{t_k < t} \Psi(t, t_k)a_i$$

■

El punto crucial es que necesitamos la invertibilidad de la matriz

$$(I - \Psi(t_0 + T, t_0)).$$

A fin de determinar la invertibilidad de $(I - \Psi(t_0 + T, t_0))$, se tiene el siguiente lema:

Lema 5. $(I - \Psi(t_0 + T, t_0))$ es invertible ssi el sistema periódico (I) tiene a la solución nula como única solución T -periódica.

Demostración. \implies (Por contrapositivo). Si suponemos que el sistema (I) tiene soluciones periódicas no triviales, se tiene que existe $x(t_0) \neq 0$ tal que

$$x(t_0) = x(t_0 + T) = \Psi(t_0 + T, t_0)x(t_0) \\ \implies \Psi(t_0 + T, t_0)x(t_0) = x(t_0)$$

con $\Psi(t, t_0)x(t_0)$ una solución general del sistema impulsivo lineal homogéneo periódico (I). (Si fuera el caso de $x(t_0) = 0$, ello implicaría que la única solución del (I) es la solución nula). Entonces se tiene

$$(I - \Psi(t_0 + T, t_0))x(t_0) = 0 \quad x(t_0) \neq 0$$

y, en consecuencia, $x(t_0) \in \ker((I - \Psi(t_0 + T, t_0)))$ por lo que la matriz $(I - \Psi(t_0 + T, t_0))$ no es invertible.

\Leftarrow Supongamos que el sistema periódico (I) tiene a la solución nula como única solución T -periódica. Entonces:

$$\Psi(t_0 + T, t_0)x(t_0) = x(t_0)$$

sólo se cumple para $x(t_0) = 0$, por lo que se tiene

$$x(t_0) - \Psi(t_0 + T, t_0)x(t_0) = 0 \\ \implies (I - \Psi(t_0 + T, t_0))x(t_0) = 0$$

lo que nos dice que $\ker((I - \Psi(t_0 + T, t_0))) = \{0\}$ por lo que la matriz $(I - \Psi(t_0 + T, t_0))$ es invertible. ■

Ahora, con propiedad, podemos decir que

$$\begin{aligned}
x(t) &= \Psi(t, t_0)(I - \Psi(t_0 + T, t_0))^{-1} \left(\int_{t_0}^{t_0+T} \Psi(t_0 + T, s)f(s)ds + \sum_{i=1}^p \Psi(t_0 + T, t_i)a_i \right) \\
&+ \int_{t_0}^t \Psi(t, s)f(s)ds + \sum_{t_i < t} \Psi(t, t_i)a_i \\
&= \int_{t_0}^{t_0+T} \Psi(t, t_0)(I - \Psi(t_0 + T, t_0))^{-1}\Psi(t_0 + T)\Psi^{-1}(s)f(s)ds \\
&+ \sum_{i=1}^p \Psi(t, t_0)(I - \Psi(t_0 + T))^{-1}\Psi(t_0 + T)\Psi^{-1}(t_i)a_i \\
&+ \int_{t_0}^t \Psi(t)\Psi^{-1}(s)f(s)ds + \sum_{t_i < t} \Psi(t)\Psi^{-1}(t_i)a_i \\
&= \int_{t_0}^t [\Psi(t, t_0)(I - \Psi(t_0 + T, t_0))^{-1}\Psi(t_0 + T)\Psi^{-1}(s) + \Psi(t)\Psi^{-1}(s)] f(s)ds \\
&+ \sum_{t_0 < t_i < t} [\Psi(t, t_0)(I - \Psi(t_0 + T, t_0))^{-1}\Psi(t_0 + T)\Psi^{-1}(t_i) + \Psi(t)\Psi^{-1}(t_i)] a_i \\
&+ \int_t^{t_0+T} \Psi(t, t_0)(I - \Psi(t_0 + T, t_0))^{-1}\Psi(t_0 + T)\Psi^{-1}(s)f(s)ds \\
&+ \sum_{t < t_i < t_0+T} \Psi(t, t_0)(I - \Psi(t_0 + T, t_0))^{-1}\Psi(t_0 + T)\Psi^{-1}(t_i)a_i \\
&= \int_{t_0}^t \Psi(t, t_0) [(I - \Psi(t_0 + T, t_0))^{-1}\Psi(t_0 + T) + I] \Psi^{-1}(s)f(s)ds \\
&+ \sum_{t_0 < t_i < t} \Psi(t, t_0) [(I - \Psi(t_0 + T, t_0))^{-1}\Psi(t_0 + T) + I] \Psi^{-1}(t_i)a_i \\
&+ \int_t^{t_0+T} \Psi(t, t_0)(I - \Psi(t_0 + T, t_0))^{-1}\Psi(t_0 + T)\Psi^{-1}(s)f(s)ds \\
&+ \sum_{t < t_i < t_0+T} \Psi(t, t_0)(I - \Psi(t_0 + T, t_0))^{-1}\Psi(t_0 + T)\Psi^{-1}(t_i)a_i
\end{aligned}$$

Si

$$P = (I - \Psi(t_0 + T, t_0))^{-1}\Psi(t_0 + T, t_0),$$

podemos definir como $G(t, s)$ a:

$$(G) \quad G(t, s) = \begin{cases} \Psi(t, t_0)P\Psi^{-1}(s) & , \quad t_0 \leq t < s \leq t_0 + T \\ \Psi(t, t_0)(I + P)\Psi^{-1}(s) & , \quad t_0 \leq s \leq t \leq t_0 + T \end{cases}$$

entonces la solución periódica descrita en (19) adopta la forma

$$(8.3) \quad x(t) = \int_{t_0}^{t_0+T} G(t, s)f(s)ds + \sum_{i=1}^p G(t, t_i)a_i$$

La función $G(t, s)$ es la llamada función de Green del sistema ()

9. Agradecimientos

Se extiende un sincero agradecimiento a DESMOS PBC por otorgar el permiso para utilizar las imágenes creadas con la calculadora gráfica DESMOS, accesible en <https://www.desmos.com/calculator>.

REFERENCES

- [1] Agarwal, R., Karakoç, F. & Zafer, A. *A Survey on Oscillation of Impulsive Ordinary Differential Equations*. Adv Differ Equ 2010, 354841 (2010). <https://doi.org/10.1155/2010/354841>
- [2] M.U. Akhmet, *Principles of Discontinuous Dynamical Systems*. Springer, New York, Dordrecht, Heidelberg, London. (2010).
- [3] D.D. Bainov, P.S. Simeonov, *Impulsive Differential Equations: Asymptotic Properties of the Solutions*. World Scientific Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences Vol. 28 (1995).
- [4] D.D. Bainov, Simeonov, P.S. *Impulsive Differential Equations: Periodic Solutions and Applications*. Pitmann Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics Vol(66). Longman Scientific & Technical, U.K. (1993).
- [5] D.D.Bainov, V.Lakshmikantham, P.S.Simeonov. *Theory of Impulsive Differential Equations*. World Scientific. Series in Modern Applied Mathematics Vol. 6 (1989).
- [6] C. Chicone. *Ordinary Differential Equations with Applications*, volume 34 of Texts in Applied Mathematics. Springer-Verlag New York, New York, 2nd edition, 2006.
- [7] Busenberg, S., Cooke, K.L. *Models of vertically transmitted diseases with sequential-continuous dynamics*, Nonlinear Phenomena in Mathematical Sciences, Academic Press, New York, 179–187. (1982).
- [8] K. Chiu. *Estudio Cualitativo de las Soluciones de Ecuaciones Diferenciales con Argumento Constante por Trozos*. Tesis de Doctorado. Facultad de Ciencias. Universidad de Chile. (2009).
- [9] K. Chiu, M. Pinto. *Periodic solutions of differential equations with a general piecewise constant argument and applications*. Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations. 46:1-19. (2010).
- [10] K.-S. Chiu, M. Pinto. *Oscillatory and periodic solutions in alternately advanced and delayed differential equations*. Carpathian Journal of Mathematics, 29(2):149–158, 2013.
- [11] E.A.Coddington, N.Levinson. *Theory of Ordinary Differential Equations* McGraw-Hill Publishing Co. (1987).
- [12] K.L.Cooke, J.A.Yorke. *Some equations modeling growth processes and gonorrhea epidemics*. Math. Biosciences 16, 75-101 (1973).
- [13] J. Dalecki and M. Krein. *Stability of Solutions of Differential Equations on Banach Space*. Translations of Mathematical Monographs, 34. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1995.
- [14] Saber Elaydi, *An introduction to difference equations (undergraduate texts in mathematics) 3rd edition*, Springer, 2005.
- [15] W. Feldman. *Lecture notes of Ordinary Differential equations (Linear systems)*. University of Utah, Fall 2021.
- [16] Floquet, G. *Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques*. Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, Serie 2, Volume 12 (1883), pp. 47-88. doi : 10.24033/asens.220. <https://www.numdam.org/articles/10.24033/asens.220/>
- [17] E. Folkers. *Floquet's theorem*. Bachelor's thesis, Faculty of Science and Engineering, University of Groningen, Groningen, The Netherlands, July 2018. Available at https://fse.studenttheses.ub.rug.nl/17640/1/bMATH_2018_FolkersE.pdf
- [18] P. González, M.Pinto. *Asymptotic behavior of impulsive differential equations*. Rocky Mountain J. of Math, 26(1), pp.165-173. Winter (1996).
- [19] Fatma Karakoc, Arzu Unal, and Huseyin Bereketoglu, *Oscillation of a nonlinear impulsive differential equation system with piecewise constant argument*, Advances in Difference Equations **2018** (2018), no. 1.
- [20] A. M. Lyapunov. *The general problem of the stability of motion*. PhD thesis, University of Kharkov, Kharkov Mathematical Society, 1892.
- [21] L. Markus and H. Yamabe. *Global stability criteria for differential systems*. Osaka Mathematical Journal, 12(2):305–317, 1960.
- [22] R.Naulín, C.Tapia. *Estabilidad de sistemas lineales impulsivos*. Revista Colombiana de Matemáticas.(29) pp.103-111. (1995).
- [23] A.M. Samoilenko, N.A. Perestyuk. *Impulsive Differential Equations*. World Scientific, Singapore (1995).
- [24] R. Torres. *Ecuaciones diferenciales con argumento constante a trozos del tipo generalizado con impulsos*. Msc. thesis, Facultad de Ciencias, Universidad de Chile, Santiago, Chile, 2015.49 Available at <https://repositorio.uchile.cl/handle/2250/188898.50>
- [25] Ricardo Torres, Manuel Pinto, *A variation of parameters formula for nonautonomous linear Impulsive Differential Equations with piecewise constant arguments of generalized type*, Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ., **20** (2024), 1–25.