Universidad Austral de Chile
Facultad de Ciencias
Escuela de Ciencias

"EQUILIBRIO ASINTÓTICO EN ECUACIONES DIFERENCIALES IMPULSIVAS"

BÁRBARA NICOLE MUÑOZ CHAURA

Seminario de Graduación presentado como parte de los requisitos para optar al grado de
Licenciado en Ciencias con mención en Matemáticas

Profesor Patrocinante:
Ricardo Torres Naranjo
Instituto de Cs. Físicas y Matemáticas
Facultad de Ciencias.

VALDIVIA–CHILE

AÑO 2019

Índice

Agradecimientos

Quisiera agradecer a Dios y a la Virgen,por darme la fuerza, luz y sabiduría suficiente en todo momento...

Quisiera agradecer al profesor Ricardo Torres. No tan solo por aceptarme como estudiante para realizar este trabajo, sino también por todas esas largas charlas de matemática y de la vida, gracias por compartir su forma de ver la matemática.

Quisiera tambien agradecer a mis queridos amigos matemáticos, por las extensas tardes juntos,tardes llenas de estudio y de diversas conversaciones: Valentina, Javiera y Luis.

En el plano personal, quiero agradecer a mi ”Gran familia”, por su apoyo incondicional en este extenso camino. Gracias por tanta paciencia y amor,por su contención cuando el camino se puso difícil, a mis queridos willi y domi, por su eternos languetazos en momentos necesarios.

A mi querida hermana, por su luz en momentos de cansancio, por cada apañe siempre. A mis padres y abuelos por tanto amor, por sus inmensos valores y sabiduría cada día. A mi tía por su aguante en cada momento.

A mi querida familia Gallardo-Barrientos,gracias por su infinito amor, gracias por cada fin de semana juntos, por acompañarme en este camino... a mi querido Karín, por su paciencia y apoyo en este último tiempo, gracias por tu inmenso amor.

A mis amigas de toda la vida: a mis tobys, gracias por su eterno acompañamiento y palabras en momento justo, gracias mi querida Leyla por tu eterna compañía en los momentos mas difíciles, a mi querida flaca por tus palabras siempre alegres, por correr cada vez que necesitaba de ti.

Por último, quisiera agradecer tambien a todos los profesores que me alentaron a estudiar matemática, a mi querido profesor Gutiérrez, gracias por su eterno ánimo. Gracias querido profe Trucco por cada conversación y palabras justas en momentos de dudas, querido profesor Daniel por su eterna simpatía y apoyo en todo momento y finalmente al profesor Bastián por su inmensa simpatia, apoyo y ánimo.

Nada de esto hubiera sido posible sin ustedes. Gracias...por tanto!
Dedicado a mi familia...

Resumen

El presente trabajo, tiene como objetivo encontrar condiciones necesarias y suficientes para establecer la existencia de un **equilibrio asintótico** para ecuaciones diferenciales impulsivas a tiempos fijos. En otras palabras, demostraremos con base en ciertas condiciones de integrabilidad y sumabilidad, utilizando desigualdad de tipo Gronwall-Bellman y el teorema de punto fijo de Banach, que cada solución de

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(t, x(t)), && t \neq t_k \\ \Delta x(t_k) &= Q_k(x(t_k^-)), && t = t_k \\ x\,(\tau) &= x_0, && t = \tau \end{aligned}$$

Satisface

$$\lim_{n\to\infty} x(t) = \xi, \quad \xi \in \mathbb{R}$$

Obtendremos, además fórmulas asíntóticas para soluciones de ecuaciones diferenciales impulsivas a tiempos fijos, como consecuencia de la existencia de equilibrio asíntótico:

$$x(t) = \xi + \mathcal{O}\left(\int_t^{\infty} \lambda(s)ds + \sum_{t\le t_k<\infty} \mu_k\right).$$

Donde λ y μ son constantes de Lipschitz relacionadas con f y Q_k respectivamente.

En primera instancia daremos a conocer de forma preliminar conceptos necesarios de la teoría de funciones continuas, de la teoría de punto fijo y de la teoría de ecuaciones diferenciales impulsivas.

Luego, se estudiará condiciones de existencia y unicidad de soluciones mediante el uso de desigualdades del tipo Gronwall-Bellman para ecuaciones diferenciales impulsivas. Más aún, deduciremos fórmulas asintóticas asociada a ecuaciones diferenciales impulsivas a tiempos fijos.
Finalmente, mostraremos ejemplos que comprueban nuestros resultados teóricos.

Abstract

In this work we will conclude the existence of an **Asymptotic Equilibrium** for the class of Impulsive Differential Equations (IDE) systems of fixed times. In other words, we prove using certain integrability conditions, Gronwall-Bellman type inequality and the Banach's fixed point theorem, that every solution of

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(t, x(t)), & t &\neq t_k \\ \Delta x(t_k) &= Q_k(x(t_k^-)), & t &= t_k \\ x(\tau) &= x_0, & t &= \tau \end{aligned}$$

satisfies

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \xi,$$

for some $\xi \in \mathbb{R}$, and has the asymptotic formulae

$$x(t) = \xi + \mathcal{O}\left(\int_t^{\infty} \lambda(s)ds + \sum_{t\leq t_k<\infty} \mu_k\right).$$

where λ and μ are Lipschitz constants related to f and Q_k respectively.

Firstly, we will give some preliminares of spaces of functions (Bounded and continuous functions), the Banach's fixed point theorem and some definitions and properties of the theory of impulsive differential equations.

Then, we will investigate some conditions for the existence and uniqueness of solutions using integral inequalities (such Gronwall-Bellman inequality) for the impulsive case. Moreover, we will give some asymptotic formulae for solutions of impulsive differential equations with fixed times. Some examples will be shown.

1. Introducción

Los descubrimientos de Newton y Leibniz en el siglo XVII sobre las ideas básicas del cálculo integral fueron cruciales para el avance que sufrieron las matemáticas. Aun más importante, fue la relación que encontraron entre el cálculo diferencial e integral, pues consiguieron fundirlos en uno solo. Una de las consecuencias de estos descubrimientos ha sido la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias, en la que se busca encontrar una función diferenciable que satisfaga cierta condición de derivada. A saber,el caso de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden:

$$x'(t) = f(t, x(t)) \tag{1}$$

para f una función continua. Cabe destacar que esta teoría fue profundamente enriquecida por el desarrollo del álgebra lineal.
Si consideramos que para (1) se producen discontinuidades de f en ciertos instantes de tiempo $\{t_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, se obtienen las llamadas *Ecuaciones Diferenciales Impulsivas.*
Muchos procesos de evolución en la vida cotidiana se caracterizan por el hecho de que en ciertos instantes de tiempo experimentan un abrupto cambio de estado. Estos procesos están sujetos a perturbaciones a corto plazo cuya duración es insignificante en comparación con la duración del proceso mismo. En consecuencia, es natural suponer que estas perturbaciones actúan instantáneamente, es decir, en forma de impulsos. Estos procesos aparecen como una descripción natural de muchos fenómenos biológicos tales como ritmo cardíaco en medicina y biología, modelos de control óptimo en economía, farmacocinética en química y farmacia, control de plagas en ecología, por nombrar algunos. Es así como las ecuaciones diferenciales impulsivas aparecen como una descripción natural de los fenómenos evolutivos observados de varios problemas reales.
La teoría de este tipo de ecuaciones se ha ido desarrollando aproximadamente durante los últimos treinta años. Responsable de esto es la famosa escuela de Kiev, liderada por el matemático ucraniano A.M. Samoilenko. Su exitosa guía de muchos años del Instituto de Matemáticas de la Academia Nacional de Ciencias de Ucrania promovió el rápido desarrollo de las matemáticas en Ucrania y la continuación de las mejores tradiciones de la mundialmente conocida escuela científica Bogolyubov - Krylov - Mitropolskiy.
Cabe mencionar que la teoría de las ecuaciones diferenciales impulsivas es mucho más rica que la correspondiente teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias. Por ejemplo, los problemas de valores iniciales de tales ecuaciones pueden, en general, no tener ninguna solución aún cuando la ecuación diferencial correspondiente es lo suficientemente fácil de resolver. Las propiedades fundamentales, como la dependencia continua en relación con los datos iniciales, y la estabilidad de sistemas impulsivos pueden necesitar una nueva interpretación mas adecuada.
En consecuencia, desde esta perspectiva hay motivos suficientes para estudiar la teoría de ecuaciones diferenciales impulsivas y sus aplicaciones.

2. Objetivos

El objetivo principal de este trabajo consiste en realizar un análisis cualitativo del comportamiento asintótico de soluciones de ecuaciones diferenciales impulsivas lineales, semilineales y no-lineales. Más precisamente, queremos encontrar condiciones para las cuales la solución del sistema impulsivo

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(t, x(t)), & t &\neq t_k \\ \Delta x(t_k) &= Q_k(x(t_k^-)), & t &= t_k \\ x\,(\tau) &= x_0, & t &= \tau \end{aligned} \tag{2}$$

sea una atractora global. En pocas palabras, para cualquier condición inicial $x\,(a)$ con $\tau < a$, las soluciones del nuevo sistema $x(t, a, x(a))$, convergerán a la solución $x(t, \tau, x(\tau))$, para todo $a \geq \tau$.
Escribiremos la solución del sistema en términos de su convergencia, lo que llamaremos **fórmula asintótica de la solución de** (2).

3. Hipótesis principales

A fin de establecer los resultados principales de la presente tesis, expondremos las hipótesis principales que usaremos en el resto de nuestro trabajo:

- (H_1)

  a)Existen funciones integrables λ en $I = [\tau, \infty)$ tal que para todos $(t, x(t)) \in I \times \mathbb{R}$ tenemos
  $$|f(t, x(t))| \leq \lambda(t)|x(t)|$$
  b)Existe una sucesión sumable de números reales no negativos μ_k tal que para cada $x \in \mathbb{R}$ tenemos
  $$|Q_k(x(t_k^-))| \leq \mu|x(t_k^-)|$$

- (H_2)

  a)La función $f(t)$ es integrable en I y existe la función λ en I tal que para todos $(t, x(t)), (t, y(t)) \in I \times \mathbb{R}$ tenemos
  $$|f(t, x(t)) - f(t, y(t)| \leq \lambda|x(t) - y(t)|$$
  b)La función Q_k es sumable en I y existe una sucesión sumable de números reales no negativos μ_k tal que para todo $x, y' in \mathbb{R}$, tenemos
  $$|Q_k(x(t_k^-)) - Q_k(y(t_k^-))| \leq \mu|x(t_k^-) - y(t_k^-)|$$

- (H_3) La función λ tambien satisface
  $$\nu_k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \lambda(s)ds \leq \nu = \sup_{k \in \mathbb{N}} \nu_k < 1.$$

4. Preliminares

Para comenzar debemos tener en cuenta las siguentes definiciones:

Definición 1. *Sea X un espacio vectorial real normado y sea $\| \cdot \|_X$ la norma asociada. Como es usual, se tiene la distancia naturalmente inducida:*

$$d(x, y) = \| x - y \|, \quad x, y \in X.$$

Si X es un espacio vectorial real (o complejo), normado y completo con respecto a $\| \cdot \|_X$ se dice que X es un Espacio de Banach.

Definición 2. *El punto fijo de una función $f : M \to M$ es un punto $x \in M$ tal que se satisface*

$$f(x) = x.$$

Definición 3. *Sean M y N espacios vectoriales normados. Una función $f : M \to N$ se denomina una aplicación contractiva, si existe $C \in \mathbb{R}$, con $0 \leq C < 1$, tal que*

$$\| f(x) - f(y) \|_N \leq C \| x - y \|_M, \quad \forall x, y \in M.$$

Nota importante 4. *Automáticamente se tiene que toda contracción es una aplicación uniformemente continua, y, por tanto, continua.*

Definición 5. *Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión. Diremos que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy si*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \textit{tal que} \quad |a_n - a_m| < \varepsilon, \quad \forall n, m \geq N$$

Definición 6. *Un espacio métrico X, se dice que es completo si toda sucesión de Cauchy definida en X converge a un elemento de X. Es decir, existe un elemento del espacio que es el límite de la sucesión.*

Definición 7. *Sea f función tal que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Diremos que $f \in L_1$ en el intervalo $[\tau, \infty)$ si y solo si:*

$$\int_\tau^\infty |f(s)| ds < \infty.$$

Análogamente, sea $l_k : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sucesión. Diremos que $(l_k)_{k\in\mathbb{N}} \in l_1(\mathbb{N})$ si y solo si:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |l_k| < \infty.$$

A continuación, enunciaremos y demostraremos un resultado relativo a convergencia de productos infinitos. Ello es necesario ya que, como veremos, será útil para evidenciar una cota para las soluciones de ecuaciones impulsivas:

Lema 8. *(Lema de criterio de comparación al límite)*
Supongase que las siguientes series

$$\sum_n a_n \text{ } y \sum_n b_n,$$

con $a_n \geq 0$ *y* $b_n > 0$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$*. Entonces, si*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = K, \qquad \textit{con } 0 < K < \infty,$$

las series son ambas convergentes, o ambas divergentes.

Demostración. Dado que $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = K$, sabemos que para todo $\varepsilon > 0$ existe un entero positivo N tal que para todo $n \geq N$ tenemos que $\left|\frac{a_n}{b_n} - K\right| < \varepsilon$, o equivalentemente

$$\begin{aligned} &-\varepsilon < \frac{a_n}{b_n} - K < \varepsilon \\ &\Rightarrow K - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < K + \varepsilon \\ &\Rightarrow (K - \varepsilon)b_n < a_n < (K + \varepsilon)b_n. \end{aligned}$$

Como $K > 0$, podemos escoger ε suficientemente pequeño tal que $K - \varepsilon$ es positivo. Así,

$$b_n < \frac{1}{K - \varepsilon} a_n$$

y por el criterio de comparación, si $\sum_n a_n$ converge, entonces $\sum_n b_n$ converge.
De igual manera, si $a_n < (K + \varepsilon)b_n$, entonces si $\sum_n b_n$ converge, nuevamente por el criterio de comparación, también $\sum_n a_n$ lo será. Entonces, ambas series convergen o ambas divergen. ∎

Teorema 9. *Sea* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de numero positivos.*
Entonces, el producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n)$ *converge, si y solo si, la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge.*

Demostración. Tomemos el logaritmo del producto. Es decir

$$\ln\left(\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n)\right) \to \sum_{n=1}^{\infty} ln(1 + a_n)$$

por lo anterior es fácil ver que la convergencia del producto es equivalente a la convergencia de la serie definida. Observamos que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{ln(1+x)}{x} = 1$$

Si suponemos $a_n \to 0$ cuando $n \to \infty$, por cursos de cálculo sabemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{ln(1+a_n)}{a_n} = 1$$

De este modo, aplicando el lema 8 se tiene que el producto es convergente. ■

Nota importante 10.

- *Usando este teorema, todo lo que sabe sobre series infinitas se traduce directamente al mundo de productos infinitos.*
- *A modo de ejemplo, el producto*

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n^p}\right)$$

converge, si y solo si, $p > 1$.

4.1. Espacio de Funciones Acotadas

Sea A un conjunto cualquiera y F un espacio vectorial normado real. Sea $f : A \to F$

Definición 11. *Diremos que* f *es acotada si*

$$\| f \|_{\infty} = \sup_{t\in A} |f(t)| < \infty.$$

Definición 12. *Sea* (f_n) *una sucesión de funciones, tal que* $f_n : A \to F$ *con* A *un espacio métrico y* F *un espacio de Banach. Diremos que la sucesión* (f_n) *converge puntualmente en* A *si para cada* $t \in A$*, la sucesión* $(f_n(t))$ *converge en* F *hacia* $g(t)$.

Definición 13. *Sea* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de funciones* $f_n : A \to F$*. Si*

$$\lim_{n\to\infty} \| f_n - g \|_{\infty} = 0,$$

decimos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformemente a* g*.*
Es importante tener en cuenta que siempre la convergencia uniforme implica la convergencia puntual.

Definición 14. *Sea $\mathcal{B}_F(A)$ el conjunto de todas las funciones acotadas de A en F en un espacio vectorial real.*

Teorema 15. *Sea F es un espacio de Banach, es decir, un espacio vectorial normado y completo, entonces $\mathcal{B}_F(A)$ es un espacio de Banach.*

Demostración. Sea (f_n) una sucesión de Cauchy en $\mathcal{B}_F(A)$. Para cada $\varepsilon > 0$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\| f_m - f_n \|_\infty \leq \varepsilon$ para $m, n \geq n_0$. De lo anterior, se tiene que para cada $t \in A$:

$$|f_m(t) - f_n(t)| \leq \varepsilon.$$

para $m, n \geq n_0$. Por tanto, puesto que F es completo, la sucesión $(f_n(t))$ converge hacia un elemento $g(t) \in F$. Además por continuidad de la norma se obtiene:

$$\| f_m(t) - g(t) \| \leq \varepsilon, \quad \forall t \in A$$

Para todo $m \geq n_0$. De esto se deduce que

$$\| g \|_\infty \leq \| f_m \|_\infty + \varepsilon,$$

Por tanto g es acotada. Además se tiene

$$\| f_m - g \|_\infty \leq \varepsilon, \quad \forall m \geq n_0, \forall t \in A.$$

lo que indica que la sucesión (f_n) converge uniformemente hacia g en el espacio $\mathcal{B}_F(A)$. ∎

4.1.1. Espacio de funciones continuas acotadas

Sea $f : E \to F$, con E un espacio métrico y F espacio normado,se tiene que $\mathcal{C}_F(E)$ es el espacio vectorial de todas las funciones continuas de E en el espacio normado F.

Se considera, $\mathcal{C}_F^\infty(E)$ es el conjunto de todas las funciones continuas y acotadas de E en F. Notemos que si E es compacto, entonces se cumple que $\mathcal{C}_F^\infty(E) = \mathcal{C}_F(E)$.
En general, $\mathcal{C}_F^\infty(E) = \mathcal{C}_F(E) \cap \mathcal{B}_F(E)$, por lo que se considera que $\mathcal{C}_F^\infty(E)$ es un subespacio normado de $\mathcal{B}_F(E)$. Además $\mathcal{C}_F^\infty(E)$ es cerrado en $\mathcal{B}_F(E)$, ya que un límite uniforme de funciones continuas acotadas es continua y acotada por defininirse sobre un compacto.

4.2. Teorema de punto fijo de Banach.

Teorema 16. *[**Teorema de Banach, sobre punto fijo de contracciones**] Sea M un espacio métrico completo. Toda contracción $f : M \to M$ posee un único punto fijo en M. Más precisamente, si escogemos un punto cualquiera $x_0 \in M$ y definiendo*

$$x_1 = f(x_0);\ x_2 = f(x_1)\ldots,$$

es decir

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

se tiene que la sucesión (x_n) *es convergente en* M *y* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ *es el único punto fijo de* f*. Por ende, se dice que el punto fijo es un atractor global de la sucesión.*

Demostración. Supongamos que la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow[n\to\infty]{} a$. Como f es Lipschitz, ello implica que es uniformemente continua, entonces continua. Luego, tenemos

$$f(a) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = a$$

Por lo tanto, existe un punto fijo $f(a) = a$.
Ahora veamos si este punto es único. Para esto supongamos que hay dos puntos fijos $f(a) = a$ y $f(b) = b$. luego se tiene

$$|f(a) - f(b)| \leq C|a-b| \Rightarrow |a-b| \leq C|a-b| \Rightarrow |a-b|(1-C) \leq 0$$

Así, sabemos que $|a-b| \geq 0$, se tiene

$$(1-C) \leq 0 \Rightarrow c \geq 1$$

Lo cual es una contradicción, pues $0 < C < 1$. Así, existe un único $a \in M$ tal que $f(a) = a$. A fin de terminar la demostración, solo nos resta demostrar que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es sucesión de Cauchy. Sea $x_0 \in M$. Vemos que:

$$\begin{aligned}
|x_1 - x_2| &= |f(x_0) - f(x_1)| \leq C|x_0 - x_1|, \\
|x_2 - x_3| &= |f(x_1) - f(x_2)| \leq C|x_1 - x_2| \leq C^2|x_0 - x_1|.
\end{aligned}$$

Por inducción, vemos que

$$|x_n - x_{n+1}| \leq C^n|x_0 - x_1|, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Se sigue que, para $n, m \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\begin{aligned}
|x_n - x_{n+m}| &\leq |x_n - x_{n+1}| + |x_{n+1} - x_{n+2}| + \ldots + |x_{n+m-1} - x_{n+m}| \\
&\leq \left(C^n + C^{n+1} + \ldots + C^{n+m-1}\right)|x_0 - x_1| \\
&= C^n\left(1 + C + C^2 + \ldots C^{m-1}\right)|x_0 - x_1| \\
&\leq \frac{C^n}{1-C}|x_0 - x_1|.
\end{aligned}$$

Como

$$\lim_{n\to\infty} C^n = 0,$$

se tiene que $(x_n)_{n\to\infty}$ es de Cauchy, por lo que el teorema queda demostrado. ■

4.3. Teorema de Picard: el Método de Aproximaciones Sucesivas

A continuación enunciaremos un clásico resultado de ecuaciones diferenciales ordinarias relativo a existencia y unicidad de soluciones de una ecuación diferencial de primer orden:

Teorema 17. *Sea f una función continua y Lipschitziana en $\Omega = I_a \times B_a$, donde Ω es un dominio abierto. Se define*

$$\begin{aligned} I_a &= \{t,\ \textit{tal que } |t-t_0| \leq a\}, & B_a &= \{x,\ \textit{tal que } |x-x_0| \leq b\} \\ &= \{t/ -a+t_0 \leq t \leq a+t_0\}, & &= \{x/ -b+x_0 \leq x \leq b+x_0.\} \end{aligned}$$

Si f es acotada ($\| f \|_\infty \leq M$) en Ω, existe una única solución de

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(t,x(t)) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned} \tag{3}$$

en I_α, donde $\alpha = \min\left\{a, \dfrac{b}{M}\right\}$.

Demostración. Sea $X = \mathcal{C}(I_\alpha, B_b)$ el espacio de Banach de las funciones continuas φ tales que $\varphi : I_a \to B_b$, donde si $\varphi_1, \varphi_2 \in X$, entonces

$$\| \varphi_1 - \varphi_2 \|_\infty = \sup_{t\in I_\alpha} |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|$$

Sea $\varphi \in X$. Consideremos F un operador definido por

$$\begin{aligned} F(\varphi) &: I_\alpha \to E \\ F(\varphi)(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t f(s,\varphi(s))ds, \quad t \in I_\alpha. \end{aligned}$$

Notamos que :

- $F(X) \subseteq X$, es decir, el operador F deja a X invariante.
- F^n es una contracción, para n suficientemente grande[1]

Vemos que, para todo $t \in I_\alpha$, se tiene:

$$\begin{aligned} |F(\varphi)(t) - x_0| &= \left| \int_{t_0}^t f(s,\varphi(s))ds \right| \\ &\leq M\alpha. \end{aligned}$$

Como $|t-t_0| \leq \alpha$,y la función F es acotada en el dominio (por ser continua definida sobre un compacto), se tiene

$$|F(\varphi)(t) - x_0| = \left| \int_{t_0}^t f(s,\varphi(s))ds \right| \leq M\alpha \leq b.$$

[1]La contracción utilizada es una contracción generalizada.

De lo anterior

$$|F(\varphi)(t) - x_0| \leq b \iff b - x_0 \leq F(\varphi(t)) \leq b + x_0.$$

Así $F(\varphi(t))$ es acotado, por lo que podemos decir que el operador F envía funciones acotadas en funciones acotadas. Así, queda demostrada la invarianza.

Comprobemos ahora que F sea una contracción:

Proposición 18. *Para $\varphi_1, \varphi_2 \in X$, para todo $n \geq 0$ se tiene*

$$|F^n(\varphi_1)(t) - F^n(\varphi_2)(t)| \leq \frac{k^n|t-t_0|^n}{n!} \parallel \varphi_1 - \varphi_2 \parallel_\infty, \quad t \in I_\alpha.$$

Demostración. A fin de demostrar la proposición anterior, procedemos por inducción. Para $n = 0$ queda comprobado rápidamente. Para $n = k+1$ se tiene:

$$\begin{aligned} \left|F^{k+1}(\varphi_1)(t) - F^{k+1}(\varphi_2)(t)\right| &= |F(F^k(\varphi_1))(t) - F(F(\varphi_2))(t)| \\ \left|F^{k+1}(\varphi_1)(t) - F^{k+1}(\varphi_2)(t)\right| &\leq \left|\int_{t_0}^{t} f(s, F^k(\varphi_1)(s)) - f(s, F^k(\varphi_2)(s) ds \right| \end{aligned}$$

Como sabemos que f es acotada en el intervalo, tenemos que F deja a X invariante y F es Lipschitziana, Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \left|F^{k+1}(\varphi_1)(t) - F^{k+1}(\varphi_2)(t)\right| &\leq \int_{t_0}^{t} C|F^k(\varphi_1)(s) - F^k(\varphi_2)(s)|ds \\ &\leq C\int_{t_0}^{t} \frac{C^k|t_0 - s|^k}{k!}||\varphi_1(s) - \varphi_2(s)|ds \\ &\leq \frac{C^{k+1}|t-t_0|^{k+1}}{(k+1)!} \parallel \varphi_1 - \varphi_2 \parallel_\infty \end{aligned}$$

Así, logramos

$$\parallel (F^n(\varphi_1), F^n(\varphi_2) \parallel_\infty \leq \frac{K^n\alpha^n}{n!} \parallel \varphi_1, \varphi_2 \parallel_\infty$$

■

Luego, para n suficientemente grande, es posible obtener

$$\frac{K^n\alpha^n}{n!} < 1,$$

logrando así que F^n sea una contracción de X, a partir de algún $n \in \mathbb{N}$. Aplicando el Teorema 16 se tiene que existe un único punto fijo φ tal que $F(\varphi)(t) = \varphi(t)$.
Es decir:

$$\varphi_(t) \quad = y_0 + \textstyle\int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds.$$

Fácilmente podemos comprobar que efectivamente satisface (3), por lo que como consecuencia del teorema de punto fijo de Banach, hemos demostrado existencia y unicidad de solución para (3), por lo que el teorema queda demostrado. ■

4.4. Lema de Gronwall-Bellman clásico

Teorema 19. *Sea I un intervalo de la forma $[a,\infty)$ o $[a,b]$ o $[a,b)$ con $a<b$. Sean α,β y u funciones a valores reales definidas sobre I. Asumamos que β y u son funciones continuas y $\alpha \geq 0$. Si β es no negativo, α es creciente y si u satisface*

$$u(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(s)u(s)\,\mathrm{d}s, \qquad \forall t \in I,$$

entonces

$$u(t) \leq \alpha(t) \exp\left(\int_a^t \beta(s)\,\mathrm{d}s \right), \qquad t \in I.$$

Demostración. Ver [3]. ■

5. Ecuaciones diferenciales impulsivas

Una *Ecuación Diferencial Impulsiva* es una ecuación de la forma:

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(t,x(t)), & t &\neq t_k \\ \Delta x(t_k) &= Q_k(x(t_k^-)), & t &= t_k \\ x(\tau) &= x_0, & t &= \tau \end{aligned} \tag{4}$$

Donde Q_k es un operador de salto (que asumiremos inyectivo), $(t_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ es tal que $t_k < t_{k+1}, \forall k \in \mathbb{Z}$ y $\lim\limits_{k\to\pm\infty} t_k = \pm\infty$. Esta sucesión corresponde a la llamada *sucesión de instantes de impulsos.* La condición del límite quiere decir que el fenómeno impulsivo se distribuye a lo largo de la recta, por lo que los impulsos persisten en el tiempo.

Definición 20. *Diremos que una función $x(t)$ es solución de la ecuación diferencial impulsiva si:*

(I) *$x(t)$ es continua en cada intervalo de la forma $I_k = [t_k, t_{k+1}), \quad \forall k \in \mathbb{N}$.*

(II) *La derivada $x'(t)$ existe en cada punto $t \in I = [\tau,\infty)$ con posibles excepciones en los puntos t_k, $k\in\mathbb{N}$, donde existe la derivada izquierda.*

(III) *En cada intervalo I_k, la ecuación diferencial ordinaria*

$$x'(t) = f(t, x(t))$$

es satisfecha.

(IV) *Para $t = t_k$, La solución satisface la condición de salto*

$$\Delta x(t_k) = x(t_k) - x(t_k^-) = Q_k\left(x(t_k^-)\right),$$

donde

$$x(t_k^-) = \lim_{\substack{t \to t_k \\ t < t_k}} x(t)$$

existe $\forall t_k$ con $k \in \mathbb{N}$ y $x(t_k)$ está definido de manera única por

$$x\left(t_k\right) = x(t_k^-) + Q_k\left(x(t_k^-)\right).$$

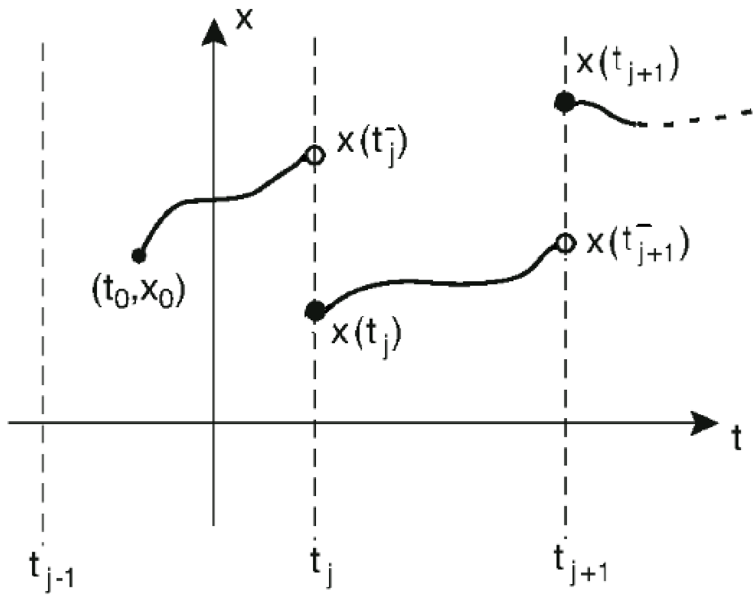

Figura 1: Forma de una solución impulsiva de (4)

5.1. Ecuacion integral asociada a (4)

Teorema 21. *Sea una función $x(t) = (t, \tau)$, donde τ es un número real fijo, es una solución de* (4) *en $[\tau, \infty[$ si y solo si satisface la siguiente ecuación integral*

$$x(t) = x(\tau) + \int_{\tau}^{t} f(s, x(s))ds + \sum_{\tau \leq t_k \leqslant t} Q_k(x(t_k^-)).$$

Demostración. La demostración será realizada por una construcción inductiva. Sea la ecuación diferencial impulsiva

$$\left.\begin{array}{l} x'(t) = f(t, x(t)), t \neq t_k \\ \triangle\, x = Q_k(x(t_k^-)) \\ x(t) = x_0. \end{array}\right\}$$

Consideremos el intervalo $t \in [\tau, t_1[$
Integrando la ecuación diferencial ordinaria, obtenemos

$$x(t) = x(\tau) + \int_\tau^t f(s, x(s))ds$$

Ahora, queremos ver qué es $x(t_1)$. Para ello, aplicando el límite a la expresión anterior, obtenemos:

$$x(t_1^-) \quad = x(\tau) + \int_\tau^{t_1} f(s, x(s))ds$$

Así, vemos que

$$\Delta x = x(t_1) - x(t_1^-) = Q_1(x(t_1^-)).$$

Luego obtenemos

$$x(t_1) = x(t_1^-) + Q_1(x(t_1^-)),$$

por lo que se tendrá

$$x(t_1) = x(\tau) + \int_\tau^{t_1} f(s, x(s))ds + Q_1(x(t_1^-)). \tag{5}$$

Ahora analizaremos análogamente el intervalo $t \in [t_1, t_2[$
integrando

$$x(t) = x(t_1) + \int_{t_1}^t f(s, x(s))ds$$

Pero, ¿quién es el $x(t_1)$?. Sabemos que $x(t_1)$ está dado por (5), por lo que reemplazando, se obtiene $x(t)$

$$x(t) = x(\tau) + \int_\tau^t f(s, x(s))ds + Q_1(x(t_1^-))ds.$$

Consideremos ahora, el intervalo $t \in [t_1, t_2[$. Integrando (4) en dicho intervalo y evaluando el límite lateral, se tiene

$$x(t_2^-) = x(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} f(s, x(s))ds + Q_1(x(t_1^-)).$$

pero sabemos que

$$\Delta x = x(t_2) - x(t_2^-) = Q_2(x(t_2^-))x(t_2) = x(t_2^-) + Q_2(x(t_2^-))$$

Así obtenemos lo siguente

$$x(t_2) \quad = x(\tau) + \int_{\tau}^{t_2} f(s, x(s))ds + Q_1(x(t_1^-)) + Q_2(x(t_2^-)),$$

o

$$x(t_2) \quad = x(\tau) + \int_{\tau}^{t_2} f(s, x(s))ds + \sum_{i=1}^{2} Q_i(x(t_i^-))$$

Por todo lo anterior, es posible definir una recurrencia. Así, inductivamente, para $t \in [\tau, t_{k(t)+1}[$, tenemos que

$$x(t) = x(\tau) + \int_{\tau}^{t} f(s, x(s))ds + \sum_{\tau \leq t_k \leqslant t} Q_k(x(t_k^-))$$

por lo que queda demostrado el teorema. ∎

5.2. Desigualdad Impulsiva del tipo Gronwall-Bellman

Teorema 22. *Sea I un intervalo. Sean $u, \eta_1 : I \to [0, \infty)$ tal que u, η_1 son funciones continua; η_1 función localmente integrable y $\eta : t_i \to [0, \infty)$. Sea además, α una constante no negativa. Asumamos que $\forall t \geq \tau$ se cumplen*

$$u(t) \leq \alpha + \int_{\tau}^{t} \eta_1(s)u(s)ds + \sum_{\tau \leq t_i < t} \eta\left(t_i\right) u(t_i^-).$$

Entonces,para $\forall t \geq \tau$ se satisface la siguiente desigualdad

$$u(t) \leq \left(\prod_{\tau \leq t_i < t} (1 + \eta(t_i)) \right) exp \left(\int_{\tau}^{t} \eta_1(s)ds \right) u(\tau)$$

Demostración. consideremos

$$u(t) \leq \alpha + \int_{\tau}^{t} \eta_1(s)u(s)ds + \sum_{\tau \leq t_i < t} \eta\left(t_i\right) u(t_i^-).$$

se denotara

$$v(t) = \alpha + \int_{\tau}^{t} \eta_1(s)u(s)ds + \sum_{\tau \leq t_i < t} \eta\left(t_i\right) u(t_i^-)$$

sabemos que se tiene que $u(\tau) \leq v(\tau)$, luego $u(t) \leq v(t)$ $\forall t \geq \tau$. Ahora al derivar $v(t)$ obtenemos

$$v'(t) = \eta_1(t)u(t)$$

luego dado que $u(t) \leq v(t)$ se tiene

$$v'(t) \leq \eta_1(t)v(t)$$

Integrando la expresión anterior entre τ y t se obtiene

$$v(t) - v(\tau) \leq \int_{\tau}^{t} \eta_1(s)v(s)ds$$

Ahora, si consideramos $\tau = t_k$ y $t = \zeta_k$, gracias al hecho de que $v(t)$ es creciente, es decir, $v(t_k) \leq v(s)$ con $t_k < s$, se obtiene

$$\begin{aligned} v(t) - v(t_k) &\leq \int_{t_k}^{t} \eta_1(s)v(s)ds \\ v(t) &\leq v(t_k) + \int_{t_k}^{t} \eta_1(s)v(s)ds \end{aligned}$$

Aplicando el clásico lema Bellman-Gronwall a la desigualdad anterior, se obtiene lo siguente:

$$v(t) \leq v(t_k) \exp\left(\int_{t_k}^{t} \eta_1(s)ds\right). \tag{6}$$

Luego, evaluando $t = t_{k+1}^-$ en (6), se obtiene

$$v(t_{k+1}^-) \leq v(t_k) \exp\left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} \eta_1(s)ds\right). \tag{7}$$

recordamos que para definir $v(t_{k+1})$ debemos considerar $v(t_{k+1}^-)$ y el operador de impulso o salto. Así, se obtiene

$$v(t_k) \leq (1 + \eta(t_k))v(t_k^-)$$

Aprovechando la última expresión, podemos ver que

$$v(t_{k+1}) \leq (1 + \eta(t_{k+1}))v(t_{k+1}^-). \tag{8}$$

Ahora, aplicando (7) en (8), vemos que

$$v(t_{k+1}) \leq (1 + \eta(t_{k+1}))v(t_k) \exp\left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} \eta_1(s)ds\right). \tag{9}$$

Analizando (9) vemos que: para $t = 0$

$$v(t_1) \leq (1 + \eta(t_1))v(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^{t_1} \eta_1(s)ds\right)$$

para $t = 1$

$$\begin{aligned} v(t_2) &\leq (1 + \eta(t_2))v(t_1) \exp\left(\int_{t_1}^{t_2} \eta_1(s)ds\right) \\ &\leq (1 + \eta(t_2))(1 + \eta(t_1))v(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^{t_1} \eta_1(s)ds\right) \exp\left(\int_{t_1}^{t_2} \eta_1(s)ds\right) \end{aligned} \tag{10}$$

para $t = 2$

$$\begin{aligned} v(t_3) &\leq (1 + \eta(t_3))v(t_2) \exp\left(\int_{t_2}^{t_3} \eta_1(s)ds\right) \\ &\leq (1 + \eta(t_3))(1 + \eta(t_2))(1 + \eta(t_1))v(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^{t_3} \eta_1(s)ds\right). \end{aligned} \tag{11}$$

Así, inductivamente, hemos resuelto (9), cuya solución es:

$$\nu(t_k) \leq \left(\prod_{k=i(\tau)+1}^{k} (1 + \eta(t_k))\right) \exp\left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} \eta_1(s)ds\right)$$

Luego como $u(t) \leq \nu(t)$ $\forall t \geq \tau$ y $u(\tau) = \nu(\tau)$ se tiene

$$u(t_k) \leq \left(\prod_{k=i(\tau)+1}^{k} (1 + \eta(t_k))\right) \exp\left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} \eta_1(s)ds\right) u(\tau). \tag{12}$$

La expresión anterior representa una desigualdad del tipo Growall-Bellman discreta. Ahora si reemplazamos (12) en (6) se obtiene

$$v(t) \leq \left(\prod_{k=i(\tau)+1}^{k} (1 + \eta(t_k))\right) \exp\left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} \eta_1(s)ds\right) \exp\left(\int_{t_k}^{t} \eta_1(s)ds\right) \nu(\tau)$$

Como bien sabemos $u(t) \leq \nu(t)$ $\forall t \geq \tau$ y $u(\tau) = \nu(\tau)$ se tiene

$$u(t) \leq \left(\prod_{k=i(\tau)+1}^{k} (1 + \eta(t_k))\right) \exp\left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} \eta_1(s)ds\right) \exp\left(\int_{t_k}^{t} \eta_1(s)ds\right) u(\tau)$$

es decir,

$$u(t) \leq \left(\prod_{k=i(\tau)+1}^{k} (1 + \eta(t_k))\right) \exp\left(\int_{\tau}^{t} \eta_1(s)ds\right) u(\tau)$$

con lo que se obtiene el resultado deseado. ∎

5.3. Existencia y Unicidad de soluciones para (4)

En esta sección,probaremos la existencia y unicidad de soluciones para ecuaciones diferenciale impulsivas a tiempos fijos :

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(t, x(t)), & t &\neq t_k \\ \Delta x(t_k) &= Q_k(x(t_k^-)), & t &= t_k \\ x(\tau) &= x_0, & t &= \tau \end{aligned}$$

Sobre el intervalo $[\tau, \infty)$, por un argumento inductivo sobre cada intervalo de la forma $I_r = [t_r, t_r + 1)$, utilizando teorema de Gronwall-Bellman y ecuación integral asociada a (4).

5.3.1. Unicidad

Considere para $x = (t, \tau, u_0)$ el problema de valor inicial para (4). Bajo las condiciones (H_1), (H_2) y (H_3) existe una solución única u de (4).

Demostración. Supongamos que se tiene solución para la ecuación impulsiva general

$$\left.\begin{aligned} x'(t) &= f(t, x(t)) \\ \triangle x &= Q_k(x(t_k^-)) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned}\right\}$$

Sean $x(t)$ y $y(t)$ dos soluciones de (4) en $[\tau, \infty)$, ambas con la misma condición inicial. Vemos que:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \int_\tau^t f(s, x(s))ds + \sum_{\tau \leq t_k \leq t} Q_k(x(t_k^-)) \\ y(t) &= y_0 + \int_\tau^t f(s, y(s))ds + \sum_{\tau \leq t_k \leq t} Q_k(y(t_k^-)). \end{aligned}$$

Restando ambas soluciones

$$x(t) - y(t) = (x_0 - y_0) + \int_\tau^t (f(s, x(s)) - f(s, y(s)))ds + \sum_{\tau \leq t_k \leq t} (Q_k(x(t_k^-)) - Q_k(y(t_k^-))).$$

Luego

$$|x(t) - y(t)| \leq |x_0 - y_0| + \int_\tau^t \lambda(s)|x(s)) - y(s)|ds + \sum_{\tau \leq t_k \leq t} \mu_k |x(t_k^-)) - y(t_k^-)|$$

Considere $u(t) = |x(t) - y(t)|$ así tenemos

$$u(t) \leq u(t_0) + \int_{\tau}^{t} \lambda(s)u(s)ds + \sum_{\tau \leq t_k \leq t} \mu_k u(t_k^-)$$

Por Lema de Gronwall-Bellman impulsivo se tiene:

$$u(t) \leq u(\tau) \left(\prod (1 + u(t_k^-)) \right) \exp \int_{\tau}^{t} \lambda(s)ds$$

Ahora, como $u(\tau) = x_0 - y_0$ donde $x_0 = y_0$, pues al comienzo asumimos que las condiciones iniciales eran iguales para ambas soluciones, se tiene que $u(\tau) = 0$, obteniéndose lo siguente

$$|u(t)| \leq 0 \iff |x(t) - y(t)| \leq 0.$$

Así, de lo anterior,

$$|x(t) - y(t)| = 0, \quad \forall t \in [\tau, \infty[.$$

Es decir, $x(t) = y(t)$ $\forall t \in [\tau, \infty[$, por lo que la unicidad queda demostrada. ■

5.3.2. Existencia

En esta sección, demostraremos la existencia de solución para (4) a través de un método inductivo propuesto en [5], el que consta de dos partes:

(i) En primer lugar, se demostrará existencia para el intervalo $[\tau, t_1]$, mediante el método de aproximaciones sucesivas de Picard.

(ii) Por último, se demostrará existencia en $[\tau, \infty)$, por medio de una extensión inductiva de existencia en intervalos compactos de la forma $[t_r, t_{r+1}]$, en donde las condiciones iniciales en cada uno de ellos estará dada por el operador de impulso.

1. **Existencia en** $[\tau, t_r)$.
   Sea el intervalo $[\tau, t_r)$. Consideremos la ecuación integral

   $$u(t) = u_0 + \int_{\tau}^{t} f(s, x(s))ds \tag{13}$$

   Demostraremos la existencia utilizando el método de aproximaciones sucesivas.
   Sea la sucesión de funciones $\{u_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}}$ definida por:

   $$u_0(t) = u_0, \qquad u_{n+1}(t) = u_0 + \int_{\tau}^{t} f(s, u_n(s))ds, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Queremos demostrar que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy.
Para esto, estimaremos la diferencia

$$\begin{aligned}\| u_{n+1}-u_n \|_\infty &\leq \int_\tau^t \eta_1(s)|u_n(s)-u_{n-1}(s)|ds \\ &\leq \| u_n-u_{n-1} \|_\infty \left(\int_\tau^t \eta_1(s)ds\right)\end{aligned}$$

Así, por inducción matemática, se tiene

$$\| u_{n+1}-u_n \|_\infty \leq \| u_0 \|_\infty \nu^{n+1}$$

Por lo tanto, dado que $\nu < 1,\ \forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\| u_0 \|_\infty \nu^{n+1} < \varepsilon, \quad \forall n \geq N.$$

Finalmente, tenemos que

$$\| u_{n+1}-u_n \|_\infty \leq \varepsilon, \quad \forall n \geq N.$$

Por lo que hemos demostrado que $\{u_n(t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy. Luego, como es sucesión de Cauchy en un espacio métrico completo, convergerá dentro del mismo espacio a un elemento $u_*(t)$. Es decir

$$\lim_{n\to\infty} u_n(t) = u_*(t)$$

Donde $u_*(t)$ satisface la ecuación inicial en $[\tau, t_r)$, por lo tanto queda demostrada la existencia.

2. **Existencia en** $[\tau, \infty)$.
   Ahora,podemos extender lo anterior para el intervalo $[\tau, \infty)$. Evaluando $t = t_r$ en (13), obtenemos

$$u(t_r^-) = u_0 + \int_\tau^{t_r} f(s, u(s))ds$$

Ahora, debido a la condición impulsiva

$$\Delta u(t_r) = Q_r(u(t_r^-))$$

obtenemos

$$\begin{aligned}u(t_r) &= u(t_r^-) + Q_r(u(t_r^-)) \\ u(t_r) &= u_0 + \int_\tau^{t_r} f(s, x(s))ds + Q_r(u(t_r^-))\end{aligned}$$

Como $u(t_r)$ está definido de manera única, aplicamos la demotración anterior realizada para el intervalo $[\tau, t_r)$ al sistema $u(t) = u(t, t_r, u(t_r))$ definido en $[t_r, t_{r+1})$. Por lo tanto, se demuestra la existencia en el último intervalo. Entonces, por inducción matemática,se demuestra la existencia de la solución única de (4) sobre $[\tau, \infty)$.

6. Resultados Principales

6.1. Equilibrio asíntótico para un sistema de ecuaciones impulsivas

En esta sección demostraremos la existencia de un equilibrio asíntótico para la clase de sistemas de ecuaciones diferenciales impulsivas de tiempos fijos (4). Decimos que el sistema de ecuaciones diferenciales impulsiva .

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(t, x(t)), && t \neq t_k \\ \Delta x(t_k) &= Q_k(x(t_k^-)), && t = t_k \\ x(\tau) &= x_0 && t = \tau \end{aligned}$$

definida en $[\tau, \infty)$ tiene un **equilibrio asíntotico** si :

(i) Para Cada $a \geq \tau$, ecuación (4) con condición inicial $x(a) = x_0$ tiene una solución $x(t)$ definida en $[a, \infty)$ que satisface

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = \xi,$$

para algun $\xi \in \mathbb{R}$

(ii) Para todo $\xi \in \mathbb{R}$ existe $a \in I$ y una solución $x(t)$ de la ecuación diferencial impulsiva definida en $[a, \infty)$ que satisface i.

Teorema 23. *Asumamos las condiciones de* (H_1),*entonces cada solución* $x(t)$ *de* (4) *con condición inicial* $x(a) = x_0$ *donde* $a \geq \tau$ *satisfacen*

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = \xi$$

para algún $\xi \in \mathbb{R}$.

Demostración. Primero, demostraremos que es acotada, bajo las condiciones de existencia y unicidad y hipotesis de Lipschicianidad, veremos si esta dentro del espacio donde trabajamos (el espacio de las funciones acotadas).
sea $x(t)$ solución de (4) con condición inicial $x(a) = x_0$ donde $a \geq \tau$, definida en un subintervalo finito $J \subset [\tau, \infty)$. Entonces $x(t)$, por la ecuación integral, satisface $\forall t \in J$,usando las hipotesis (H_1) y (H_2) tenemos que :

$$
\begin{aligned}
|x(t)| &\leq |x_0| + \int_\tau^t |f(s,x(s))|ds + \sum_{\tau \leq t_k \leqslant t} |Q_k(x(t_k^-))| \\
&\leq |x_0| + \int_\tau^t \lambda |x(s)|ds + \sum_{\tau \leq t_k \leqslant t} \mu_k |(x(t_k^-)|
\end{aligned}
$$

Por Gronwall-Bellman, tenemos

$$
|x(t)| \leq \left(\prod_{\tau \leq t_i < t} (1+\mu_k)) \right) exp \left(\int_\tau^t \lambda(s)ds \right) u(\tau)
$$

Como consecuencia de la integrabilidad de los coeficiente, la solución de 4 está acotada, por lo que puede extenderse más allá de sup J. Ahora teniendo en cuenta la integrabilidad de los coeficientes, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $t, s > N$ entonces

$$
\begin{aligned}
|x(t) - x(s)| &\leq \int_s^t |f(u,x(u)|du + \sum_{\tau \leq t_k \leqslant t} |Q_k(x(t_k^-))| \\
&\leq \int_s^t \lambda(u)|x(u)|du + \sum_{\tau \leq t_k \leqslant t} \mu_k |x(t_k^-)|
\end{aligned}
$$

Es decir

$$
|x(t) - x(s)| \leq C \left(\int_s^t \lambda(u)ds + \sum_{\tau \leq t_k \leq s} \mu_k \right) |x(t) - x(s)| \leq \varepsilon
$$

De esta manera, por la criterio de Cauchy, $x(t)$ converge a algun $\xi \in \mathbb{R}$, es decir, obtenemos la condición (i) de la definición de equilibrio asíntótico.

Para satisfacer la condición (ii) de la definición de equilibrio asíntótico, utilizamos el teorema del punto fijo de Banach junto con (H_2), por lo que tenemos el siguiente teorema: ∎

Teorema 24. *Sean las hipotesis de Lipschitz sobre f y Q,sean λ y $\mu_k \in L^1, l^1$ respectivamente,entonces para cada $\xi \in \mathbb{R}$ existe $a \geq \tau = t_0$ y una solución $x(t)$ de ecuación impulsiva definida en $[a, \infty)$ tal que*

$$
\lim_{t \to \infty} x(t) = \xi \tag{14}
$$

Demostración. como $\mu_k, \lambda \in L^1, l^1$ podemos escoger "a" suficientemente grande tal que

$$
L = \int_a^\infty \lambda(s)ds + \sum_{a \leq t_k} \mu_k < 1 \tag{15}
$$

Considerando $\mathcal{B}$ el espacio de Banach de las funciones acotadas definidas sobre $[a, \infty[$ definimos el siquente operador $T : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ definido por

$$(Tx)(t) = \xi - \int_t^{\infty} f(s, x(s))ds - \sum_{t \leq t_k} Q_k(x(t_k^-)).$$

Queremos utilizar Teorema de punto fijo de Banach, para esto debemos demostrar

- $T(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B}$, es decir,verificar que $\mathcal{B}$ es invariante.
- T es Contracción.

fácilmente verificamos que $T(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B}$, ya que

$$\begin{aligned}
|(Tx)(t)| &\leq |\xi| + \int_t^{\infty} |f(s, x(s))|ds + \sum_{t \leq t_k} |Q_k(x(t_k^-))| \\
|(Tx)(t)| &\leq |\xi| + \int_t^{\infty} |f(s, x(s)) - f(s, 0)|ds + \int_t^{\infty} |f(s, 0)|ds \\
&\quad - \sum_{t \leq t_k} |Q_k(x(t_k^-)) - Q_k(0)| + \sum_{t \leq t_k} |Q_k(0)|
\end{aligned}$$

además es Lipschitz, se obtiene lo siguente

$$|(Tx)(t)| \leq |\xi| + \int_a^{\infty} \lambda(s)|x(s)|ds + \int_t^{\infty} |f(s, 0)|ds + \sum_{a \leq t_k} \mu_k |x(t_k^-)| + \sum_{t \leq t_k} |Q_k(0)|$$

luego como

$$\int_t^{\infty} |f(s, 0)|ds \in L^1 y \sum_{t \leq t_k} |Q_k(0)| \in l^1$$

Se obtiene

$$\begin{aligned}
|(Tx)(t)| &\leq \alpha + \int_a^{\infty} \lambda(s)|x(s)|ds + \sum_{a \leq t_k} \mu_k |x(t_k^-)| \\
|(Tx)(t)| &\leq \alpha + C \left(\int_a^{\infty} \lambda(s)ds + \sum_{a \leq t_k} \mu_k \right) < \infty
\end{aligned}$$

Así obtenemos el resultado deseado.

Ahora, tenemos que verificar si T define una contracción. Sea $x, y \in \mathbf{B}$, con $t \in [a, \infty[$,se tiene

$$\begin{aligned}
|(Tx)(t) - (Ty)(t)| &\leq \int_t^\infty |f(s, x(s)) - f(s, y(s))|ds + \sum_{t \leq t_k} |Q_k(x(t_k^-)) - Q_k(y(t_k^-)| \\
|(Tx)(t) - (Ty)(t)| &\leq \int_t^\infty \lambda(s)|x(s) - y(s)|ds + \sum_{t \leq t_k} \mu_k |x(t_k^-) - y(t_k^-)| \\
|(Tx)(t) - (Ty)(t)| &\leq |x - y|_\infty \left(\int_t^\infty \lambda(s)ds + \sum_{t \leq t_k} \mu_k \right) \\
|(Tx)(t) - (Ty)(t)| &< L|x - y|_\infty.
\end{aligned}$$

Luego T es una contracción. Por lo tanto, existe un punto fijo único para T en $\mathcal{B}$, tal que

$$x(t) = \xi - \int_t^\infty f(s, x(s))ds - \sum_{t \leq t_k} Q_k(x(t_k^-)), \quad \forall t \geq a$$

Ahora, definiendo

$$\xi' = \xi - \int_a^\infty f(s, x(s))ds - \sum_{a \leq t_k} Q_k(x(t_k^-))$$

tenemos que $x(t)$ satisface (4). tal que

$$x(t) = \xi' - \int_a^t f(s, x(s))ds + \sum_{a \leq t_k < t} Q_k(x(t_k^-)), \forall t \geq a$$

Ahora si $t \to \infty$ se tiene lo siguente

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = \xi$$

Asi, queda demostrado lo que buscábamos. ■

Como consecuencia del teorema recién demostrado, se logra la siguiente representación para las soluciones de (4):

Corolario 25. *Sean los teoremas 6.1,24 y sus hipótesis satisfechas. La solución de* (4) *satisface la siguiente fórmula asíntótica, como consecuencia de la existencia de equilibrio asíntótico:*

$$x(t) = \xi + \mathcal{O}\left(\int_t^\infty \lambda(s)ds + \sum_{t \leq t_k < \infty} \mu_k \right).$$

Donde λ y μ son constantes de Lipschitz relacionadas con f y Q_k respectivamente.

Finalmente, como consecuencia de los teoremas 6.1 y 24, tenemos el resultado principal de nuestro trabajo, el cual se reduce en el siguiente resultado:

Corolario 26. *Sean las condiciones* (H_1) *y* (H_2) *satisfechas. Entonces para la ecuación impulsiva*

$$
\begin{aligned}
&x'(t) = f(t, x(t)), \quad t \neq t_k \\
&\Delta x(t_k) = Q_k(x(t_k^-)), \quad t = t_k \\
&x(a) = x_0
\end{aligned}
$$

existe un equilibrio asíntótico global. Es decir, para cualquier $a \geq \tau$ *suficientemente grande, todas las soluciones convergen a* $\xi \in \mathbb{R}$*, cuando* $t \to \infty$*. Más aún, dado* $\xi \in \mathbb{R}$*, es posible construir una ecuación del tipo* (4) *tal que converja a* $\xi \in \mathbb{R}$ *cuando* $t \to \infty$*. Así, se tiene una suerte de "control" sobre la ecuación diferencial impulsiva en cuestión.*

6.2. Ejemplo de equilibrio asíntótico

En esta sección mostraremos algunos ejemplos que muestran la efectividad de nuestros resultados.

Ejemplo 27. *Sea la ecuación diferencial impulsiva*

$$
\begin{aligned}
&x'(t) = 0, \qquad\qquad t \neq k \\
&\Delta x(k) = \frac{1}{3^k} x(k^-), \quad t = k, \quad k \in \mathbb{N}, \\
&x(0) = 1
\end{aligned}
\tag{16}
$$

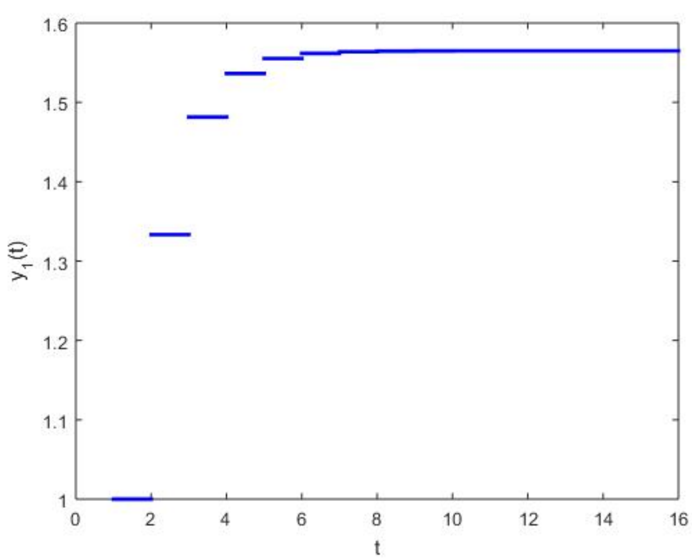

Figura 2: Solución impulsiva de (16)

Es fácil ver que se satisfacen todas las hipotesis del teorema 26, por lo que la ecuación (16) posee un equilibrio asintótico. Además, es importante notar que la solución es

$$x(t) = \prod_{k=1}^{r(t)} \left(1 + \frac{1}{3^k}\right)$$

donde $r(t)$ corresponde al único entero tal que $t \in I_r = [r, r+1[,\ r \in \mathbb{N}$, y satisface

$$\lim_{t\to\infty} x(t) \approx 1{,}56.$$

Ejemplo 28. *Sea la ecuación diferencial impulsiva*

$$\begin{aligned} &x'(t) = \frac{y(t)}{t^2} + \sin\left(\frac{y(t)}{\sqrt{2}t^2}\right), \quad t \neq k \\ &\Delta x(t_k) = (-1)^k \tanh\left(\frac{y(t_k^-)}{k^2}\right) + \frac{\cos(t_k)}{k^2}, \quad t = k, \quad k \in \mathbb{N} \\ &x(1) = 0,5. \end{aligned} \tag{17}$$

De igual manera que el ejemplo anterior, es fácil ver que se satisfacen todas las hipotesis del teorema 26, ya que $f(t) = \dfrac{1}{t^2} \in \mathcal{L}^1([1,\infty[)$, $g(x) = (-1)^k \tanh\left(\dfrac{x((t_k)^-)}{k^2}\right) + \dfrac{\cos(t_k)}{t^2}$ *y* $h(x) = \sin\left(\dfrac{y(t)}{\sqrt{2}t^2}\right)$ *son funciones tipo Lipschitz con factores de Lipschitz* $\dfrac{1}{t^2}$ *y* $\dfrac{1}{\sqrt{2}t^2}$ *respectivamente, ambos integrables. Así, la ecuación* (17) *posee un equilibrio asintótico.*

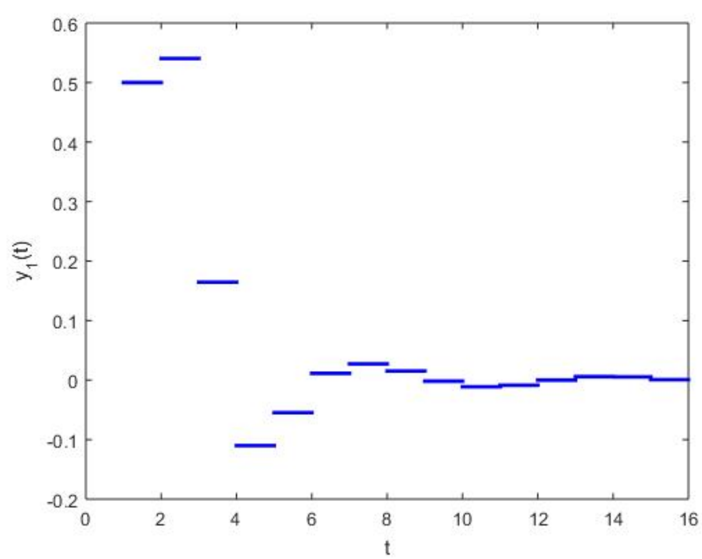

Figura 3: Solución impulsiva de (17) para $t \in [0, 16]$

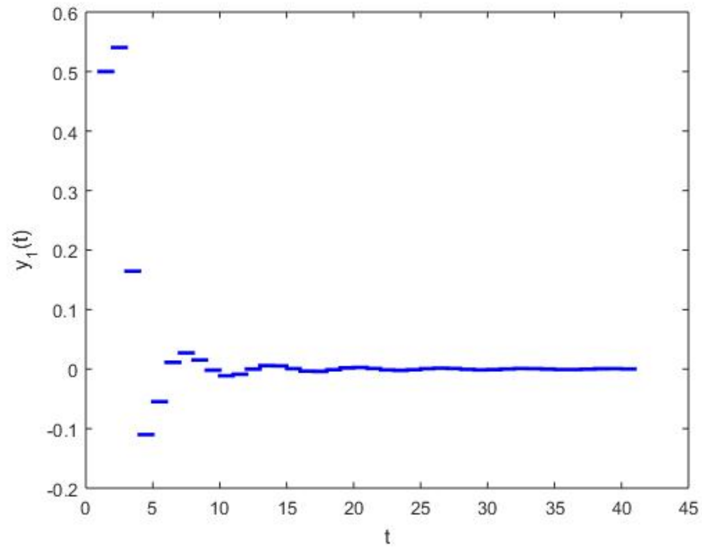

Figura 4: Solución impulsiva de (17) para $t \in [0, 50]$

Referencias

[1] M.U. Akhmet, *Principles of Discontinuous Dynamical Systems*. Springer, New York, Dordrecht, Heidelberg, London. (2010).

[2] S. Castillo, M. Pinto, R. Torres. *Asymptotic formulae for Impulsive differential equations with piecewise constant argument of generalized type*, Electron. J. Differential Equations, Vol. 2019 (2019), No. 40, pp. 1-22.

[3] E.A. Coddington, N. Levinson, *Theory of Ordinary Differential Equations*, McGraw-Hill Publishing Co, (1987).

[4] J. Dieudonné, *Fundamentos del Análisis Moderno*, Editorial Reverté, (1979).

[5] M. Pinto, D. Sepúlveda, R. Torres, *Exponential periodic attractor of an impulsive Hopfield-type neural network system with piecewise constant argument of generalized type*, Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. 2018, No. 34, 1-28.

[6] M. Pinto, *Asymptotic equivalence of nonlinear and quasílinear differential equations with piecewise constant argument*, Math. Comp. Model., **49** (2009), pp. 1750–1758.

[7] A.M. Samoilenko, N.A. Perestyuk. *Impulsive Differential Equations*. World Scientific, Singapore (1995).

[8] R. Torres, *Differential Equations with Piecewise Constant Argument of Generalized Type with Impulses*, Máster's thesis, Facultad de Ciencias, Universidad de Chile, (2015).